平成20年度総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻
五年一貫制博士課程入学試験問題

専門科目

平成19年8月27日（月）13時00分〜16時00分

[注意事項]

以下の第1問から第6問までの6題から4題を選択し解答せよ。
※開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。

受験番号 ______________________　氏名 ______________________

[第 1 問]

(1) $(x,\ y,\ z)$ 空間内で次の頂点をもつ 4 面体の体積を求めよ。

$$(2,\ 1,\ 8),\ (2,\ 1,\ 5),\ (3,\ 2,\ 9),\ (3,\ 3,\ 10)$$

(2) 曲線 (常螺旋)C: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$ $(0 \leq t \leq 4\pi)$ の長さを求めよ。

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (y+z,\ z+x,\ x+y)$ の上記曲線 C 上に沿う線積分 $\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

(4) ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (x^3,\ 0,\ z^2)$ とし、S を単位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ とする。法線面積分 $\int\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} dS$ を求めよ。

ここで、$\boldsymbol{n}$ は S に対して外向きの単位法線ベクトルである。

[第 2 問]

(1) 一回当たり確率 p で起こる事象が，n 回の独立な試行で x 回起こる確率 $P(x)$ を示せ．ただし p は $[0,1]$ の実数で，また n と x は 0 以上の整数で $x \leq n$ とする．

(2) (1) の結果の式で，$n \to \infty$ の極限をとると，正規分布で近似されることが知られている．x が次の正規分布に従うとき，平均が μ，分散が σ^2 となることを示せ．必要があれば $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いよ．

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \qquad x \text{ は } [-\infty,\, \infty] \text{ の実数.}$$

(3) (1) の結果の式で，np を一定値 λ に固定して $n \to \infty$ の極限をとると，

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda), \qquad x \text{ は } [0,\, \infty] \text{ の整数,}$$

となり，これをポアッソン分布と呼ぶ．この場合の x の平均値 (μ) と分散 (σ^2) を定義に従って計算して求めよ (単に答えを書くのではなく計算過程も示すこと)．また，両者の関係を示せ．$\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = 1$ であることを参考にせよ．

(4) x と y が互いに独立な統計量のとき，$z = f(x,y)$ とすると，z の分散 (σ_z^2) は x, y のそれぞれの平均値 $(\mu_x,\, \mu_y)$ と分散 $(\sigma_x^2,\, \sigma_y^2)$ を用いて，

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2_{x=\mu_x,\, y=\mu_y} \times \sigma_x^2 \;+\; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2_{x=\mu_x,\, y=\mu_y} \times \sigma_y^2$$

と近似されるとする．この場合に，統計量 x, y がそれぞれ平均値 μ_x, μ_y のポアッソン分布に従うとき，次の (a), (b) で定義される z の分散 (σ_z^2) を，μ_x と μ_y のみを用いてそれぞれ表せ．

(a) $z = \dfrac{y+1}{x+1}$

(b) $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ 　($\ln$ は自然対数)

[第３問]

(1) 質量 m の粒子の波動関数 $\psi(\mathbf{r},t)$ とシュレディンガー方程式は以下のようにかけるとする。$\mathbf{r}$ は位置ベクトル、 t は時間をあらわす。

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t) \tag{1}$$

$i=\sqrt{-1}$、$\hbar(=h/2\pi)$ はプランク定数、$V(\mathbf{r})$ は時間に依存しないポテンシャルエネルギーである。エネルギー E をもちいて、波動関数は $\psi(\mathbf{r},t)=u(\mathbf{r})e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ と変数分離できる。時間に依存しないシュレディンガー方程式を求めよ。

(2) 一次元井戸型ポテンシャル ($x \leq 0$ と $x \geq d$ で V は無限大, $0 < x < d$ で $V=0$) のなかの質量 m の粒子の振る舞いを考える。

(a) 時間に依存しない波動関数を $u(x)=C\sin kx$ とおいて、k を求めよ。とくに規格化定数 (C) を求める必要はない。

(b) 粒子のエネルギー準位を求めよ。

(c) この井戸型ポテンシャルの中にスピン 1/2 のフェルミ粒子が 3 個あるとする。その時の最低エネルギーを求めよ。

(3) 図のような一次元ポテンシャル障壁 (V_0) に、エネルギー E_0 の粒子 (質量 m) が $+x$ 方向に入射した場合を考える。$E_0 < V_0$ とする。

(a) 領域 (a), (b), (c) に対応する波動関数は、それぞれ、次のようにかける。

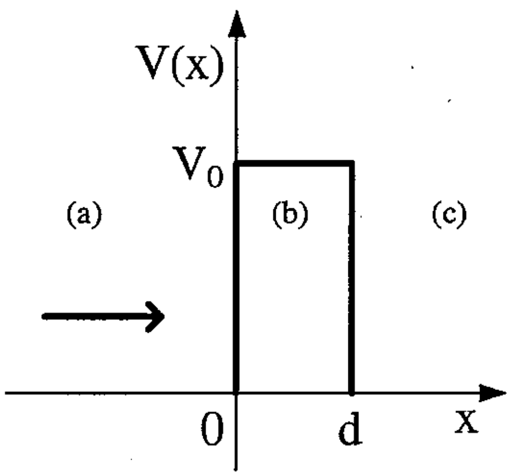
$$u(x) = a_1\exp(-ik_a x) + a_2\exp(ik_a x) \tag{2}$$

$$u(x) = b_1\exp(-k_b x) + b_2\exp(k_b x) \tag{3}$$

$$u(x) = c\exp(-ik_c x) \tag{4}$$

これらの k_a, k_b, k_c を求めよ。

(b) トンネル効果によってポテンシャル障壁を透過する確率振幅 $\frac{c}{a_1}$ をもとめよ。(結果のみでなく、途中経過も書くこと)



[第 4 問]

(1) 金属中の電子が、あるエネルギー E の状態を占める確率はフェルミ・ディラックの分布関数、

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_f}{kT}\right)+1} \tag{1}$$

で与えられる。E_f はフェルミエネルギーである。金属のフェルミエネルギーは、後述する実験の温度範囲（$T < 2200$ K）では温度に依存せず、絶対温度 0K の時のフェルミエネルギーと同じとみなせる。絶対温度が 3000K の時の熱エネルギー kT の値を [eV] 単位で求めよ（有効数字 2 桁）。

ここで素電荷 e は 1.60×10^{-19} [C] =[J·(eV)$^{-1}$] で、

ボルツマン定数 k は 1.38×10^{-23} [J·K^{-1}] である。

(2) 金属面に垂直な方向に x 軸を取り、面内に y-z 面を取る。電子の運動量空間 (p_x, p_y, p_z) における状態密度関数 $Z(E)$ は、

$$Z[E(p_x, p_y, p_z)] = \frac{2}{h^3} \tag{2}$$

で与えられる。ここで、h はプランク定数である。

エネルギー $(E - E_f)$ は kT に比べて十分大きく（1）式のフェルミ・ディラック関数は

$$f[E(p_x, p_y, p_z)] = \exp\left(-\frac{E-E_f}{kT}\right) = \exp\left(\frac{E_f}{kT}\right) \cdot \exp\left(-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m_e kT}\right) \tag{3}$$

と書ける。ここで、m_e は電子の静止質量である。金属に熱を加え、x 軸方向の電子の運動量が臨界運動量 p_{x0} を越えると、その電子は金属表面のエネルギー障壁を飛び越えて外にでてくる。その時、臨界運動量 p_{x0} は、

$$\frac{p_{x0}^2}{2m_e} = \phi + E_f \tag{4}$$

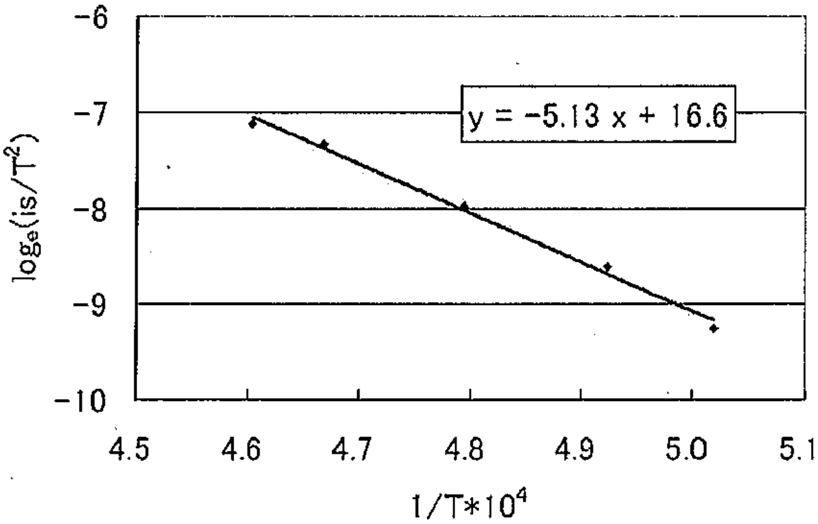
で与えられ、ϕ は仕事関数と呼ばれる。金属に熱を加えることで放出される熱電子の放出電流密度 i_S は、

$$i_S = \frac{e}{m_e}\int_{p_{x0}}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_x\, Z[E(p_x, p_y, p_z)] f[E(p_x, p_y, p_z)] dp_x dp_y dp_z \tag{5}$$

で計算できる。（2）から（5）までの式を利用して、次のリチャードソン・ダッシュマンの式を導き、式中の定数項 A を表す式を求めよ。必要があれば $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を用いよ。

$$i_S = AT^2 \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right) \tag{6}$$

(3) この熱電子放出電流につき、タングステンの仕事関数を計測する図 (次頁) のような実験結果が報告されている。この実験結果からタングステンの仕事関数を [eV] 単位で求めよ（有効数字 2 桁）。ここで図の縦軸は $\ln\left(\frac{i_S}{T^2}\right)$(ln は自然対数) で、横軸は $\frac{1}{T} \times 10^4$ で表示されている。計測データを一次回帰した直線の傾斜は -5.13 で、切片は 16.6 であった。



(4) タングステンに光を当てて光電子放出を得るためには、光の波長をどれだけ短くする必要があるか、計算して答えよ（有効数字２桁）。また、得られた電磁波の波長は電磁波帯の呼称では何と呼ばれているか答えよ。
ただし、タングステンの仕事関数は、問３で得られたものとする。また、光速は $c = 3.00 \times 10^8$ [m·s^{-1}]、プランク定数は $h = 6.63 \times 10^{-34}$ [J·s]=4.14×10^{-15} [(eV)·s] とする。

[第 5 問]

地球上の緯度 α $(\alpha > 0)$ の地点における質点の運動について考察する。

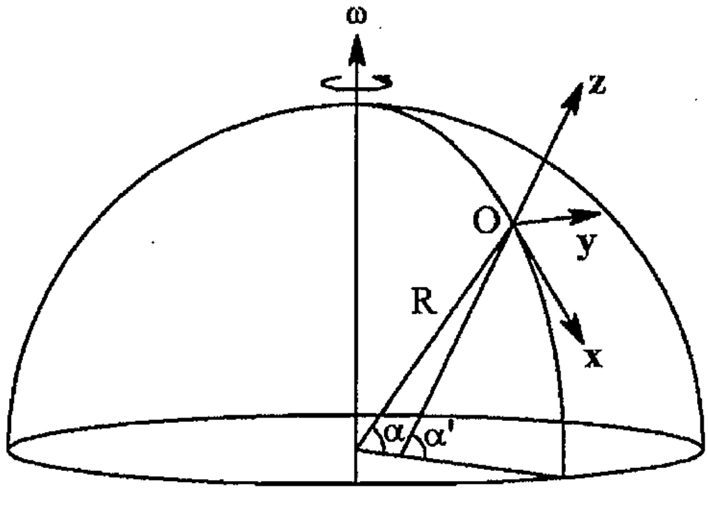
(1) 一様な角速度 ω で回転する座標系における質点の運動方程式は以下のように表される。

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - 2m\left(\omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \quad (1)$$

質点の質量を m、位置ベクトルを $\mathbf{r}$、外力のベクトルを $\mathbf{F}$ とし、回転座標系の角速度ベクトルを ω で表す。

(1) 式右辺の第 2 項および第 3 項について、それぞれどのような力と呼ばれているか答えよ。

(2) 図に示すように鉛直に沿って外向きに z 軸を取り、これに垂直な子午線上の真南方向を x 軸、東向きを y 軸とした局所座標系を定義する。原点を緯度 α の地球表面上とする。地球は半径 R の球体とし角速度 ω で回転する。表面における重力加速度を g とする。z 軸と赤道面との作る角 α' を表す式を求めよ。ただし、外力 $\mathbf{F}$ は、O 点で地球の中心に向かう重力とする。



座標系の定義

(3) 質点が原点から x 軸方向に速度 v_0 で放出されたとき、この質点の xy 平面での運動方程式を示せ。なお、質点は xy 平面内に拘束されているものとし、その移動量は地球半径 R より十分に小さく、(1) 式の右辺の第 1 項、第 3 項の変化は無視できるものとする。また、空気抵抗や摩擦はないものとする。

(4) (3) で求めた運動方程式を解き、質点の xy 平面内での運動を図示せよ。

[第 6 問]

以下の問いに答えよ。必要な定数等の値は末尾にまとめてあるものを用いること。

(1) 地球が太陽の周りを 1 年かけて回ることで観測者の位置が変わるので星は遠方の背景に対して少し位置を変える。このわずかな変化を年周視差というがこれが測定できれば星までの距離を知ることが出来る。つまり太陽地球間の距離（1 天文単位）を D とすれば年周視差が p ラジアンのとき星までの距離 d は $d = D/p$ となる。視差 p が $1''$（1 秒角）になるような場合の星までの距離を 1 pc（パーセク）と定義するが、1 パーセクは何メートルになるか。有効数字 2 桁で答えよ。

(2) 太陽のような主系列星は中心の水素がヘリウムに変換される核融合反応でエネルギーを生成して安定に光っていることがわかっている。太陽は主系列期に約何年光りつづけることができるかを求めよ。(有効数字 1 桁で答えよ)。ただし太陽の物質は質量比で 70%が水素で構成され、主系列期に燃料として消費できるのは星の全水素量の 10%とする。

(3) 水素を燃やして輝いている主系列星は、中心の水素が燃え尽きると主系列を離れて外層が膨張しつつ光度も上がって有効温度が下がることが進化計算からわかっている。このような進化が進んで膨張したある星の光度、半径、有効温度、をそれぞれ L、R、T_{eff} とする。

(a) 太陽の光度、半径、有効温度、をそれぞれ $L_{\odot}$、$R_{\odot}$、$T_{\mathrm{eff}\odot}$ とするとき、$R/R_{\odot}$ を L、T_{eff}、$L_{\odot}$、$T_{\mathrm{eff}\odot}$ で表せ。

(b) もしこの星の主系列期に周りに惑星が回っていたとして、この膨張した時期になっても星に飲み込まれないでいるためには惑星の公転周期は少なくともいくら以上でなければならないだろうか。星の質量を M として、その公転周期の下限を、M、π(円周率)、G(重力定数)、L、T_{eff}、$L_{\odot}$、$T_{\mathrm{eff}\odot}$、$R_{\odot}$ で表せ。(但し惑星は円軌道と仮定せよ。)

(4) 大質量で非常に高温の星の外層は放射圧が圧倒的に大きくこれに比べてガス圧は無視できる。このような場合、星が安定であるためには内向きの重力が外向きの放射の力に比べて大きくなければならない、という要請から「ある質量の星はこれ以上の光度になることはない」というエディントン限界光度 L_{E} が導かれる。

(a) 半径 R、質量 M の恒星表面における表面密度を ρ としよう。単位体積あたりの物質に働く外向きの放射による力は単位時間あたりに渡される放射の運動量なので、表面で単位時間に吸収される放射エネルギー $\kappa\rho F_{\mathrm{rad}}$ を光速度 c で割ることで得られる。[ここで F_{rad} は放射フラックス (光度 L を表面積で割ったものに等しい) であり、κ は単位質量あたりの吸収係数である。] このとき、L_{E} を π（円周率）、G、M、κ、c で表す表式を導け。

(b) さらに L_{E} と恒星質量 M の関係を $L_{\mathrm{E}}/L_{\odot} = \square\ (M/M_{\odot})$ と書いた場合□に入る具体的な数値を求めよ（有効数字 1 桁で答えよ）。
但し恒星の物質は純粋に水素のみで構成されて全て電離している（電子密度 n_{e} = 陽子密度 n_{p}）と仮定し、吸収係数は電子散乱（散乱断面積 σ_{e}）のみが効くとして十分なので $\kappa\rho = \sigma_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{e}}$ とせよ。

[定数等の数値]

$1\ \mathrm{AU} = 1.50 \times 10^{11}$ m (天文単位)
$1\ \mathrm{year} = 3.2 \times 10^{7}$ s
$\sigma_{\mathrm{e}} = 6.7 \times 10^{-29}\ \mathrm{m}^2$ (電子散乱断面積)
$G = 6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$ (重力定数)
$m_{\mathrm{e}} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg (電子質量)
$m_{\mathrm{p}} = 1.7 \times 10^{-27}$ kg (陽子質量)
原子質量単位 (1.6605×10^{-27} kg) で表した場合、
$m(^1\mathrm{H}) = 1.00794$ (水素原子質量)、$m(^4\mathrm{He}) = 4.00260$ (ヘリウム原子質量)
$M_{\odot} = 2.0 \times 10^{30}$ kg (太陽質量)
$L_{\odot} = 3.9 \times 10^{26}\ \mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$ (太陽光度)
$c = 3.0 \times 10^{8}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (光速度)