

総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻

五年一貫制博士課程

平成 25 年度 4 月入学に係る筆記試験（専門科目）問題

(2012 年 9 月 3 日 13 時 00 分～16 時 00 分)

※開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。

以下の第 1 問から第 6 問までの 6 題から、4 題を選択し解答せよ。

解答用紙は各問題 2 枚ずつ（第 6 問のみ 3 枚）ある。解答とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。

受験番号：_____

氏名：_____

専門科目 第1問

問1. 2回微分可能な実関数 $u(x)$, $v(x)$ について、微分演算子

$$L[u] = f \frac{d^2 u}{dx^2} + g \frac{du}{dx} + hu \quad (1)$$

と、これに随伴する微分演算子

$$M[v] = \frac{d^2(fv)}{dx^2} - \frac{d(gv)}{dx} + hv \quad (2)$$

を定義する。 f は2回微分可能, g は1回微分可能, h は連続な x の実関数とする。

(a) このとき

$$vL[u] - uM[v] = \frac{dN}{dx} \quad (3)$$

という関係が成り立つ。関数 $N(x)$ の表式を求めよ。

(b) 演算子 L と M の関係を

$$M[u] = L[u] + G \frac{du}{dx} + Hu \quad (4)$$

のように書いたとき、関数 $G(x)$, $H(x)$ の表式を示せ。

(c) また、

$$\frac{df}{dx} = g \quad (5)$$

が成り立つとき、 $G = H = 0$ であることを示せ。このとき、演算子 L は自己随伴であるといい、微分方程式 (1) を自己随伴な微分方程式という。

問2. 区間 $x_1 \leq x \leq x_2$ で2回微分可能な実関数 $y(x)$ に対し、積分演算子

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} \left[p \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2qy \frac{dy}{dx} + ry^2 \right] dx \quad (6)$$

を定義する。 p は2回微分可能、 q は1回微分可能、 r は連続な x の関数とする。端点での y の値 $y(x_1) = y_1$ および $y(x_2) = y_2$ は変えずに、 $x_1 < x < x_2$ で $y(x)$ を任意の微小量 $\delta y(x)$ だけ変化させても $I[y]$ が変化しないためには、 y はどのような微分方程式を満たさなければならないかを導け。また、その微分方程式が自己随伴であることを示せ。

問3. 式 (6) において、 $p = 1$, $q = r = 0$ の場合を考え、また x の範囲を $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ 、 y についての境界条件を $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ とする。

(a) $y(x) = x$ は境界条件を満たす関数の例である。これについて $I[y]$ の値を求めよ。

(b) $y(x) = \sin(\pi x/2)$ も境界条件を満たす関数の例である。これについても $I[y]$ の値を求めよ。

(c) 上で求めた2つの $I[y]$ の値はどちらが小さいかを述べ、またなぜそうなるのかを問2の結果を用いて議論せよ。

専門科目 第2問

問1. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ であることを、実空間における極座標への変数変換を用いる方法によって示せ。

問2. 以下の問に答えよ。ただし i は虚数単位である。

(a) 関数 $f(z)$ の k 階導関数を $f^{(k)}(z)$ とすると、関数 $f(z)$ を $z=0$ の近傍でテーラー展開せよ。

(b) (a)の結果を利用し、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を導け。

(c) テーラー展開を用いた方法とは別の方法として、関数 $A(x) = \cos x + i \sin x$ が満たす微分方程式を利用することでオイラーの公式を導け。

問3. z を複素数とする。複素平面 $|z| < +\infty$ 上に長さをもつ単純閉曲線 C を考え、その内部がつくる領域を D とする。 C と D とを内部にふくむある領域で正則な二つの関数 $f(z)$ と $g(z)$ とが C 上で $|f(z)| > |g(z)|$ をみたすとする。このとき D 内にある $f(z)$ の零点の個数と $f(z) + g(z)$ の零点の個数とは相等しい(ルーシェ (Rouché) の定理)。この定理を応用し、有理整式 $F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ($a_n \neq 0$)が z 平面に n 個の零点をもつことを示せ(代数学の基本定理の証明)。

専門科目 第3問

質点に働く力の作用線がいつも空間中の一定点（中心）を通り、この力が一定点から質点までの距離のみで表される中心力が働く場合の質点の運動を考える。以下の問いに答えよ。

問1 力が中心からの距離 r のみのポテンシャル $V = V(r)$ で表されるとする。質点の質量を m として質点の運動方程式を表し、全力学エネルギー、角運動量が保存されることを示せ。

問2 (a) 質量 m の質点がポテンシャル $V = mkr^3$ の力を受けて運動している。ここで k は正の定数、 r は中心からの距離である。質点の軌道が半径 r_0 の円である時、質点の運動エネルギー、角運動量、及び運動の周期を求めよ。

(b) この質点が弱い摂動を受けて円運動が乱される時、質点の半径 r_0 のまわりの微小変位 ξ の微分方程式を示せ。この時、角運動量は保存されるとし、微小変位 ξ の1次までの近似で考えるとする。この方程式はどのような運動を表すか具体的に説明せよ。

問3 質量 m の質点がポテンシャル $V = -mK/r$ の力 (K は正の定数) を受けて運動している場合、質点の運動 (軌道) は

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

で表される。ここで、 r は中心からの距離、 θ は中心最接近点 (近地点) 方向から測った角度、 e は離心率、 p は近地点方向から直角方向の中心軌道距離 (半直弦) である (図1参照)。離心率は $0 \leq e < 1$ の範囲で考え、近地点距離を r_1 、中心から最も離れる遠地点距離を r_2 とする。

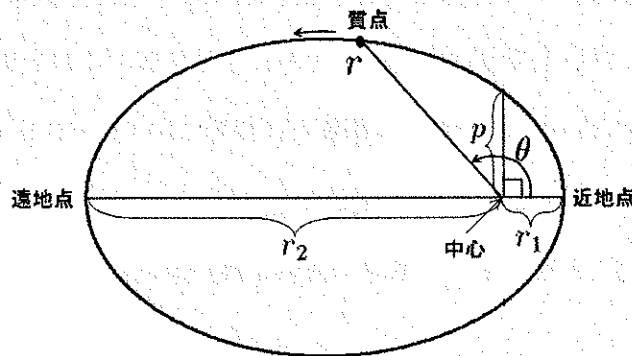


図1: 質点の運動

(a) この時、離心率 e 、軌道長半径 $a = (r_1 + r_2)/2$ 、半直弦 p を、この運動の単位質量当たりの保存力学エネルギー E 、単位質量当たりの保存角運動量 J 、定数 K を用いて表せ。

(b) 質点が扁平な (離心率 e が 1 に近い) 軌道運動をしており、近地点近傍時のみ小さな抵抗を受けて減速するとする (例えば人工衛星が地球大気の摩擦力を受けるような状態) (図 2 参照)。この抵抗が、以下の (1)~(3) の軌道要素に及ぼす影響について、近地点での角運動量の変化 ΔJ との関係を用いて述べよ。変化分は記号の前に Δ を付けて表すものとする。結果的に軌道がどのように変化していくか説明せよ。図を用いて説明してもよい。

- (1) 離心率
- (2) 長半径
- (3) 周期
- (4) 軌道の変化についての説明

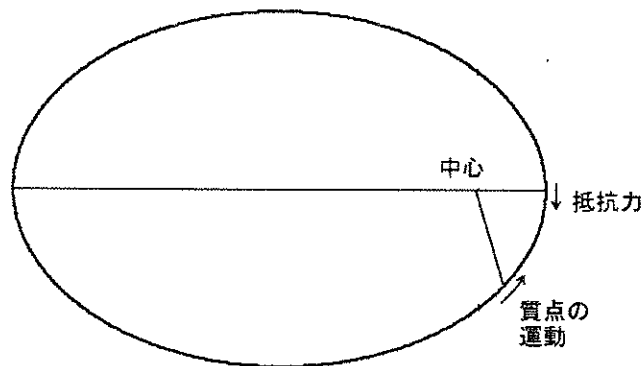
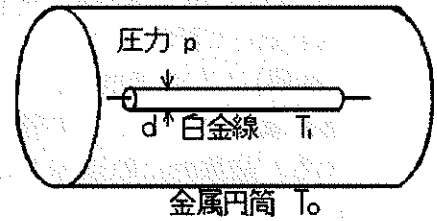


図 2: 質点は中心力のもとで扁平な軌道運動をしており、近地点近傍でのみ運動と反対方向の小さな抵抗を受ける状況を考える。

専門科目 第4問

ピラニーゲージ (Pirani Gauge) と呼ばれる真空計では右図のような細い白金線に電流を流し、室温より高い温度に保って使用する。この線の直径が気体の平均自由行程に比べて十分小さい場合、温度 T_0 の気体が白金線表面に衝突し、この線と同じ温度 (T_1) にある気体と同じ速度分布をもって再び表面から飛び出すと考えてよい。この過程で奪われた熱量から気体の圧力を求めることが出来る。以下の条件のもとで下記の設問に答えなさい。



圧力 $p = 1 \text{ Pa}$ のヘリウムガス中で直径 $d = 0.1 \text{ mm}$ の白金線に電流を流し、室温 ($T_0 = 300 \text{ K}$) より 100° 高い温度 ($T_1 = 400 \text{ K}$) に保たれているとする。この時、熱放射や熱伝導でも熱は失われるがここでは無視する。また下記の物理定数、必要に応じて積分公式を用いること。

- 問1. 温度 $T_0 = 300 \text{ K}$ 、圧力 $p = 1 \text{ Pa}$ のヘリウムガスの数密度 n を求めよ。さらに、平均自由行程を求め、それが白金線の直径 0.1 mm より十分長いことを示せ。
- 問2. 温度 T の気体中では粒子速度が v と $v + dv$ との間にある確率 $f(v)dv$ は
- $$f(v)dv = Av^2 \exp\{-mv^2/(2kT)\}$$
- によって与えられる (マクスウエル・ボルツマンの速度分布則)。
 ここで $A = (2/\pi)^{1/2}(m/kT)^{3/2}$ 、 m は粒子の質量、 k はボルツマン定数である。ヘリウムガスの室温 ($T_0 = 300 \text{ K}$) における平均速度 \bar{v} を有効数字1桁で求めなさい。
- 問3. 単位時間に白金線表面の単位面積に衝突する気体の粒子数を表す式を導きなさい。
- 問4. 白金線表面から飛び出す気体粒子の運動エネルギーの平均値を表す式を導きなさい。
- 問5. これらを用いて白金線の温度を $T_1 = 400 \text{ K}$ に保つために必要な単位長さ当たりの熱量 $[Wm^{-1}]$ を有効数字1桁で求めなさい。

物理定数：

- ・ヘリウム粒子の質量： $6.6 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- ・ヘリウム粒子の半径： 0.14 nm
- ・標準大気圧： $1.0 \times 10^5 \text{ hPa}$
- ・アボガドロ数： $6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- ・ボルツマン定数： $1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
- ・1モルの気体定数： $8.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- ・理想気体1モルの体積 ($0^\circ\text{C}, 1 \text{ 気圧}$)： $0.022 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$

積分公式： $I_n = \int_0^\infty x^n \exp(-x^2) dx$ とすると、 $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 、 $I_1 = \frac{1}{2}$ 、 $I_n = \frac{1}{2}(n-1)I_{n-2}$

専門科目 第5問

以下の電気回路に関する問1と問2に答えよ。

問1

(a) 図1のように5つの抵抗が電圧源に接続された回路を考える。図のそれぞれの位置にある抵抗の値を、 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R_5 とする。この回路において R_5 の抵抗を流れる電流がゼロであった。 $R_2 = 1.5 \Omega$ 、 $R_3 = 1.2 \Omega$ 、 $R_4 = 2.5 \Omega$ 、 $R_5 = 0.11 \Omega$ の時、 R_1 の値を求めよ。

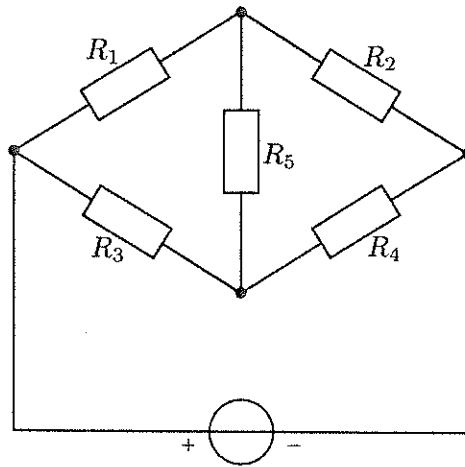


図 1:

(b) 等しい抵抗値 3.6Ω を持つ金属線6本を、図2のようにつないで四面体の形をした回路を構成する。四面体の頂点Aと頂点Bを導線につなぎ、頂点Aに電流を流入させると頂点Bから電流が流出した。この時、四面体の形をした回路が作る合成抵抗の値を求めよ。

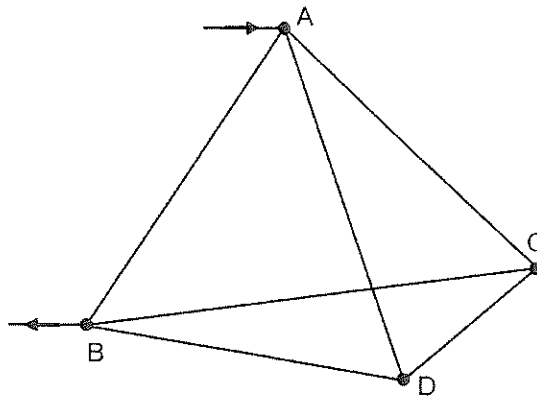


図 2:

問2

図3のように、コイル、抵抗、コンデンサが、電圧源に直列に接続された回路を考える。電圧源は正弦波電圧源で、その角周波数は ω ($\omega > 0$)、電圧の振幅は V_m である。この回路を流れる交流電流（正弦波電流）について考える。コイルの自己インダクタンスを L 、抵抗の値を R 、コンデンサの電気容量を C とする時、以下の問いに答えよ。

(a) V_m を固定して ω を変化させると回路を流れる交流電流の振幅 (I_m) が変化し、 $\omega = \omega_0$ の時、交流電流の振幅が最大の値 I_{m0} となった (図4参照)。 ω_0 を求めよ。

(b) V_m を固定して ω を変化させた時、交流電流の振幅が I_{m0} の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍となる角周波数を ω_1 、 ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$) とする (図4参照)。 $Q \equiv \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$ と定義した時、 Q を、 L と R と C を使って表せ。

(c) $V_m = 0.25$ V、 $I_{m0} = 4.5$ mA、 $\omega_0 = 1.5 \times 10^7$ rad/s、 $Q = 50$ であった。この時、コンデンサの電気容量 C を求めよ。

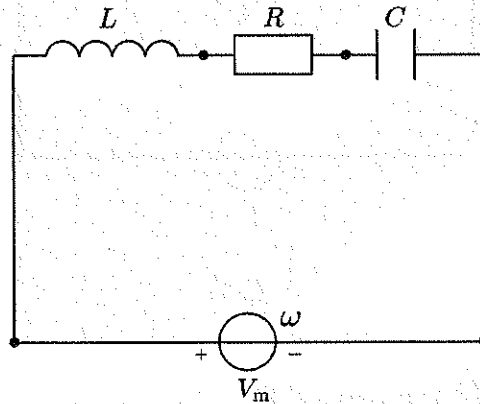


図3:

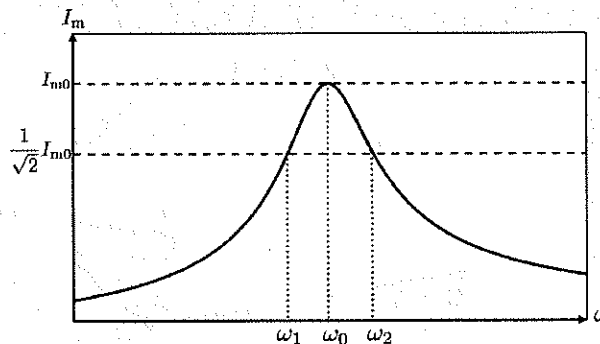


図4:

専門科目 第6問

問1. 以下の問いに答えよ。必要な定数等の値は末尾にまとめている定数表を用いること。

- (a) 宇宙が無限に広がっており、星が均一に分布し、星自身の光度が場所に寄らず一定であったならば、夜空が限りなく明るいのではないかという疑問が、「オルバースのパラドックス」と呼ばれている。この「オルバースのパラドックス」が意味するところを、式を用いて説明せよ。
- (b) 太陽が単位時間あたりに放射する総エネルギー (W)、地球軌道におけるトータルフラックス密度 (全放射流束) (W/m^2) およびエネルギー密度 (J/m^3) を求めよ。なお、太陽は定数表に示す有効温度を持つ黒体放射源であるとする。また、温度 T の黒体から単位面積当たり放射される単位時間当たりのエネルギーは、定数表に示すシュテファン-ボルツマン定数 (σ) を用いて、 σT^4 (W/m^2) と表わされる。解答に当たっては、計算式を示し、有効数字1ケタの精度で概数を求めよ。計算式には定数表に示す記号を用いよ。
- (c) エドウィン・ハッブルによる宇宙膨張の発見、および、その後の観測成果により、現在の宇宙はビッグバンにより形成されたと考えられている。ビッグバンの証拠とされる宇宙背景放射は3 Kの黒体放射として観測されている。宇宙背景放射のトータルフラックス密度 (W/m^2) およびエネルギー密度 (J/m^3) を求めよ。また、太陽からどれほど離れると太陽のエネルギー密度と宇宙背景放射のエネルギー密度が等しくなるかを距離の単位を[m] (メートル) で求めよ。解答に当たっては、計算式を示し、有効数字1ケタの精度で概数を求めよ。計算式には定数表に示す記号を用いよ。

【定数表】

太陽の有効温度	$T_s = 6000 \text{ K}$
太陽の半径	$R_s = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$
太陽と地球の距離	$D_e = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$
地球の半径	$R_e = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$
宇宙背景放射の温度	$T_{3K} = 3 \text{ K}$
パーセク (pc)	$1 \text{ pc} = 3.1 \times 10^{16} \text{ m}$
ハッブル定数	$H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$
真空中の光速	$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
万有引力定数	$G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
プランク定数	$h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$
ボルツマン定数	$k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
シュテファン-ボルツマン定数	$\sigma = 5.7 \times 10^{-8} \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

問2 星形成が活発な領域には、星惑星系形成の現場と考えられる高密度ガス塊が存在し、ガス塊中に含まれる固体微粒子（ダスト）の熱放射からガス塊中のダスト質量 M_d を導出できる。以下の問いに答えよ。

(a) いま、ダストはガス塊中に均一に分布し、すべて同じ温度 T で黒体放射しているとする。背景から入射する放射が無視できる場合、ガス塊中のダストの放射強度は、 $I_\nu = B_\nu [1 - \exp(-\tau_\nu)]$ と与えられる。ここで $B_\nu(T)$ は温度 T におけるプランクの放射式で $B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} [\exp(h\nu/kT) - 1]$ と表され、単位は $\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{str}^{-1}$ である。 τ_ν は周波数 ν における光学的厚みで、単位質量当たりの吸収断面積 κ_ν (m^2/kg)、地上の観測者からガス塊までの距離 D 、地上からみたガス塊の立体角 Ω を用いて $\tau_\nu = \kappa_\nu M_d / \Omega D^2$ と近似できる。ガス塊中のダストの周波数 ν におけるフラックス密度が地上で F_ν ($\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$) と観測されるとし、ガス塊中のダスト質量を導出せよ。また、ダスト放射が光学的に薄い場合には、ダスト質量の表式が

$$M_d = \frac{D^2 F_\nu}{\kappa_\nu B_\nu}$$

となることを示せ。ガス塊までの距離は十分に遠く、ガス塊の立体角は十分に小さいとする。

(b) ガス塊が天球面上で半径 R の円とみなせるとき、光学的厚みが 1 となる波長 λ を M_d と R を用いて表せ。ただし、吸収係数は周波数の 2 乗に比例し、波長 $1300\mu\text{m}$ での吸収係数は $\kappa_\nu = 0.03\text{m}^2/\text{kg}$ 、数値の単位は MKS 単位系を用いて表せ。なお、必要なら $\sqrt{3\pi^{-1}} = 1$ を使え。

(c) 図 1 は原始星が誕生すると期待されるガス塊中のダストからのフラックス密度の観測結果である。ミリ波帯では、ダストの熱放射は光学的に薄く、放射がレーリー・ジーンズ近似できると仮定し、図中の表に示したフラックス密度を使ってダスト質量を太陽質量を単位にして有効数字 2 桁で求めよ。また、ダスト質量の計算に用いた波長での光学的厚みを有効数字 2 桁で求めよ。なお、ガス塊までの距離は $D = 140\text{pc}$ 、ガス塊の半径は $R = 0.05\text{pc}$ 、ダスト温度は 15K、吸収係数は(b)の結果を用いよ。

(d) 図1のガス塊よりも2倍遠い距離に、ダスト温度が2倍高く、質量が2倍大きいガス塊があったとする。このガス塊のフラックス密度分布の概略を図1のフラックス密度分布との関係が分かるように描け。ただし、ダストの吸収係数は図1のガス塊と同じとし、温度に依らないものとする。なお、フラックス密度分布は図1の実線で示された分布と相似形であるとし、ピークの位置はウイーンの変位則で近似できるものとする。

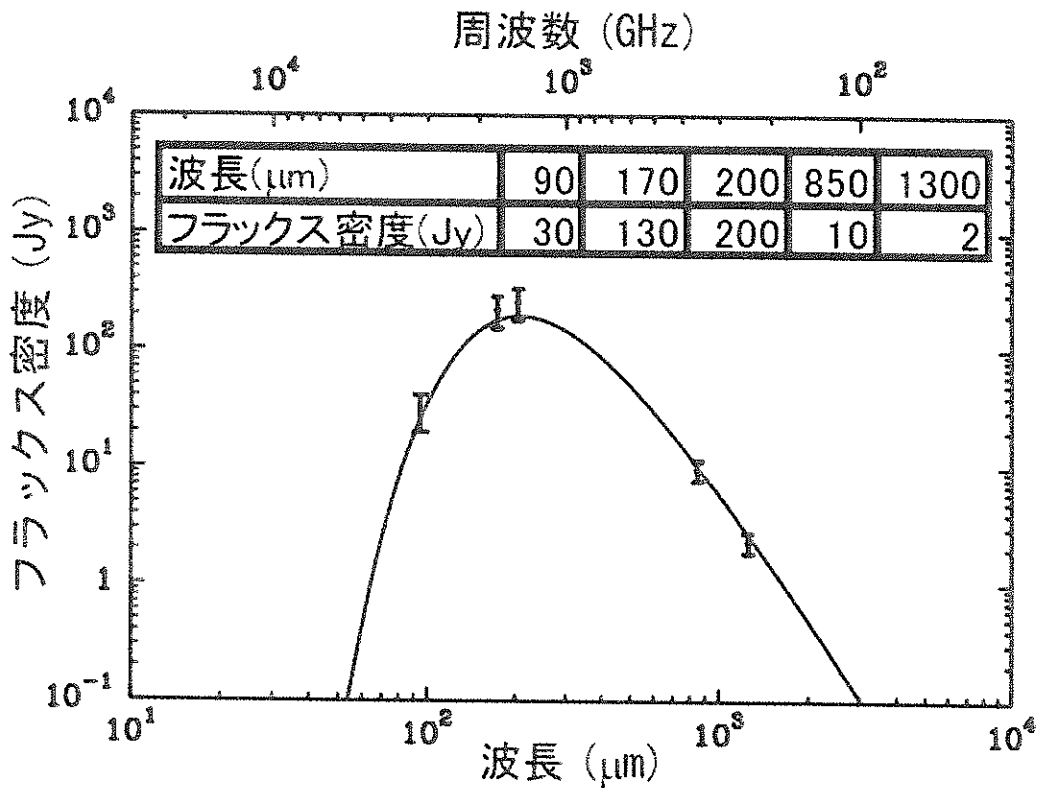


図1. ガス塊中のダストによる放射のフラックス密度と波長の関係。

(注) 縦軸のフラックス密度の単位はジャンスキー(Jy)で、 $1\text{Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$ である。