

第 1 問出題意図

複素数に関する基礎力を問う

第 1 問解答例

1. (i)

$n = 0$ のとき、 $(\cos \theta + i \sin \theta)^0 = 1$ 、 $\cos 0 + i \sin 0 = 1$ 、ゆえに成立。

$n = 1$ のとき、複素数 z の定義により、成立は自明。

正の整数 $n - 1$ のとき、 $(\cos \theta + i \sin \theta)^{n-1} = \cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta$ が成立していると仮定する。

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= (\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos(n-1)\theta \cos \theta - \sin(n-1)\theta \sin \theta) + i(\cos(n-1)\theta \sin \theta + \sin(n-1)\theta \cos \theta) \\ &= \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned}$$

すなわち正の整数 n のときにも成り立つ。数学的帰納法により、任意の正の整数に対してド・モワブルの公式は成立する。

(ii)

任意の負の整数 n を考える。 $n = -m$ とおけば、 m は正の整数(自然数)。すなわち、 $(\cos \theta + i \sin \theta)^m = \cos m\theta + i \sin m\theta$ は成り立っている。

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= (\cos \theta + i \sin \theta)^{-m} \\ &= \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^m} \\ &= \frac{1}{\cos m\theta + i \sin m\theta} \\ &= \frac{\cos m\theta - i \sin m\theta}{(\cos m\theta + i \sin m\theta)(\cos m\theta - i \sin m\theta)} \\ &= \cos m\theta - i \sin m\theta \\ &= \cos(-m)\theta + i \sin(-m)\theta \\ &= \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned}$$

すなわち、任意の負の整数 n に対しても成り立っている。

上記により、0 および正負両方を含む任意の整数 n について、ド・モワブルの公式が成り立つことが示された。

2. $r^n = |z|^n = 1$ より $r = 1$ 。 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta = 1$ より、 $\cos n\theta = 1$ 、 $\sin n\theta = 0$ 。これを満たす θ は、 $\theta = 2\pi \frac{k}{n}$ 、ただし $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 。

3. 設問 2 の問題文に示された解に $n = 3$ 、 $k = 0, 1, 2$ を当てはめればよい。 $1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ 。

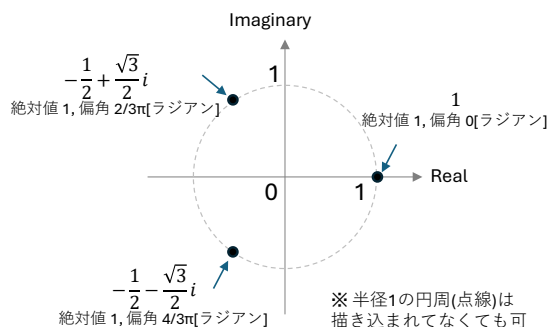


図 1: 小問 3 解答図例

4. 設問 2 と同様に、解を $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と置けば、 $|-i|^3 = 1$ より $r = 1$ 。 $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta = -i$ だから、 $\cos 3\theta = 0$ 、 $\sin 3\theta = -1$ より、 $\theta = \frac{\pi(3+4k)}{6}$ 、ただし $k = 0, 1, 2$ 、すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ 。したがって、解は $i, -\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{\sqrt{3}-i}{2}$ 。

5. 設問 3 の解のうち、1 の原始 3 乗根は、 $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ と $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ である。

設問 4 同様に、解を $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と置けば、いずれの解も絶対値が 1 であるから、 $r = 1$ 。

$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ の 3 乗根:

$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ より、 $\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$ かつ $\sin 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。したがって、 $\theta = \frac{2(1+3k)\pi}{9}$ 、ただし $k = 0, 1, 2$ 。

これを書き下すと、 $\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}, \cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9}, \cos \frac{14\pi}{9} + i \sin \frac{14\pi}{9}$ 。

$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ の 3 乗根:

$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ より、 $\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$ かつ $\sin 3\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。したがって、 $\theta = \frac{2(2+3k)\pi}{9}$ 、ただし $k = 0, 1, 2$ 。

これを書き下すと、 $\cos \frac{4\pi}{9} + i \sin \frac{4\pi}{9}, \cos \frac{10\pi}{9} + i \sin \frac{10\pi}{9}, \cos \frac{16\pi}{9} + i \sin \frac{16\pi}{9}$ 。

6. 複素数 ω_m が 1 の原始 m 乗根、複素数 ω_n が 1 の原始 n 乗根であるとする。 $\arg \omega_m = 2\pi \frac{p}{m}$ 、 $\arg \omega_n = 2\pi \frac{q}{n}$ と表すことができる。ここで p は m よりも小さい自然数、 q は n よりも小さい自然数である。 m と p 、 n と q は、それぞれお互いに素である。

さて、 $\arg(\omega_m \times \omega_n) = \arg(\omega_m) + \arg(\omega_n) = 2\pi \frac{p}{m} + 2\pi \frac{q}{n} = 2\pi \frac{qm + pn}{mn}$ 。したがって、 $\omega_m \times \omega_n$ は 1 の mn 乗根である。さらに、 p と q 、 m と n は、それぞれお互いに素な自然数であることから、 $qm + pn$ は m の倍数でも n の倍数でもない。すなわち $2\pi \frac{qm + pn}{mn}$ は 2π の整数倍ではない。したがって、 $\omega_m \times \omega_n$ は 1 の原始 mn 乗根である。

第2問出題意図

ガウス分布に従う統計量に関する基礎知識を問う

第2問解答例

1. 極座標 (r, θ) に変換すると

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dx dy = r dr d\theta$$

より,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta r e^{-ar^2}.$$

ここで $t = r^2$ と変数変換すると, $dt = 2r dr$ であるため, 上式は

$$\int_0^{\infty} dt \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{-at}}{2} = \pi \int_0^{\infty} dt e^{-at} = \left[-\frac{\pi}{a} e^{-at} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{a}$$

これが $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy$ に等しいので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

2. 確率密度関数の定義より, 変数 X が $x_1 \leq X \leq x_2$ となる確率は

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dX$$

である。 $Y = aX$ ならば $dX = \frac{dY}{a}$ で, $X: x_1 \rightarrow x_2$ のとき, $Y: ax_1 \rightarrow ax_2$ となることから, 上式右辺を Y の積分形に書き直すと

$$\int_{ax_1}^{ax_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{Y}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{a} dY = \int_{ax_1}^{ax_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} e^{-\frac{(Y-a\mu)^2}{2(a\sigma)^2}} dY = P(ax_1 \leq Y \leq ax_2)$$

これは, Y が平均 $a\mu$, 標準偏差 $a\sigma$ のガウス分布に従うことを表している。

3. ガウス分布の定義式を代入すると, 問題文にある畳み込み積分の被積分関数は

$$\begin{aligned} p_1(Y-x)p_2(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_1^2} \{x^2 - 2(Y-\mu_1)x + (Y-\mu_1)^2\} - \frac{1}{2\sigma_2^2} \{x^2 - 2\mu_2x + \mu_2^2\} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left[-\left(\frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_2^2} \right) x^2 + 2 \left(\frac{Y-\mu_1}{2\sigma_1^2} + \frac{\mu_2}{2\sigma_2^2} \right) x - \frac{(Y-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\mu_2^2}{2\sigma_2^2} \right] \end{aligned}$$

ここで,

$$A = \frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_2^2}, \quad B = \frac{Y-\mu_1}{2\sigma_1^2} + \frac{\mu_2}{2\sigma_2^2}, \quad C = \frac{(Y-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{2\sigma_2^2}$$

と定義すると, 上式は

$$\begin{aligned} p_1(Y-x)p_2(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp(-Ax^2 + 2Bx - C) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left[-A \left(x - \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{B^2}{A} - C \right] \end{aligned}$$

となる。

この被積分関数を x で積分する。1. のガウス積分を用いると

$$\begin{aligned} p(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(Y-x)p_2(x)dx = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(x-\frac{B}{A})^2+\frac{B^2}{A}-C} dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{\frac{B^2}{A}-C} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{A}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{\frac{B^2}{A}-C} \end{aligned}$$

上式の指数関数のべきに、(2) 式を代入する。

$$\begin{aligned} \frac{B^2}{A} - C &= \frac{B^2 - CA}{A} \\ &= \frac{\left(\frac{Y-\mu_1}{2\sigma_1^2} + \frac{\mu_2}{2\sigma_2^2}\right)^2 - \left\{\frac{(Y-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{2\sigma_2^2}\right\} \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_2^2}\right)}{A} \\ &= \frac{\frac{(Y-\mu_1)\mu_2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} - \frac{(Y-\mu_1)^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2} - \frac{\mu_2^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2}}{A} \\ &= -\frac{(Y-\mu_1-\mu_2)^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2 A} = -\frac{(Y-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \end{aligned}$$

すなわち、

$$p(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{-\frac{(Y-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

となる。これとガウス分布の定義式を見比べることで、変数 Y は平均 $\mu_1 + \mu_2$ 、標準偏差 $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ のガウス分布に従うことが示される。

4. 変数 X_1, X_2 がそれぞれガウス分布 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1), \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ に従う時、2. より $x = a_1 X_1$ と $y = a_2 X_2$ はそれぞれ平均 $a_1 \mu_1, a_2 \mu_2$ 、標準偏差 $a_1 \sigma_1, a_2 \sigma_2$ のガウス分布に従う。したがって、3. より、 $z = x + y = a_1 X_1 + a_2 X_2$ はガウス分布に従い、その平均は $a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2$ 、標準偏差は $\sqrt{a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2}$ となる。同様に変数 w を $w = z + a_3 X_3$ と定義すれば、 w はガウス分布に従い、その平均・標準偏差はそれぞれ、 $a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + a_3 \mu_3, \sqrt{a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + a_3^2 \sigma_3^2}$ となる。したがって、帰納的に $Y = \sum_{i=1}^k a_i X_i$ はガウス分布に従い、その平均は

$$\sum_{i=1}^k a_i \mu_i,$$

標準偏差は

$$\sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_i^2}$$

となる。

5. 各確率変数 X_i ($i = 1, \dots, k$) がそれぞれガウス分布 $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ に従うとき、変数 $X_i - \mu_i$ ($i = 1, \dots, k$) は、ガウス分布 $\mathcal{N}(0, \sigma_i)$ に従う。ここで 4. で出てきた $Y = \sum_{j=1}^k a_j X_j$ において

$$\begin{aligned} a_j &\rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}} \\ X_j &\rightarrow X_j - \mu_j \end{aligned}$$

と置き換えると、4. の結果を用いることで Y は平均 $\mathbf{0}$ 、標準偏差

$$\sqrt{\sum_{j=1}^k a_j^2 \sigma_j^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(\left. \frac{\partial f}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}} \right)^2 \sigma_j^2}$$

のガウス分布に従うことがわかる。問題文にある近似式を一部移項して

$$\tilde{f}(X_1, X_2, \dots, X_k) - f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) = \frac{\partial f}{\partial X_1} \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}} (X_1 - \mu_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_k} \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}} (X_k - \mu_k)$$

と書くと、この式の右辺は $Y = \sum_{j=1}^k a_j (X_j - \mu_j)$ となっている。つまり、左辺の

$$\tilde{f}(X_1, X_2, \dots, X_k) - f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$$

は平均 $\mathbf{0}$ のガウス分布に従う。 $\tilde{f}$ は f の（2 次以降の微小項を落とした）近似式であることから、 $f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ は、近似的に平均が $f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ 、標準偏差が

$$\sqrt{\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial X_j} \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}} \right)^2 \sigma_j^2}$$

のガウス分布に従うことが示される。

6. (a) 問題文より

$$\begin{aligned} \mu_m &= 6.0, \quad \sigma_m = 0.2 \\ \mu_d &= 100, \quad \sigma_d = 10 \end{aligned}$$

である。 μ_m と μ_d を代入した時の変数 M の値は

$$\bar{M} = 6.0 - 5 \log_{10}(100) + 5 = 1.0.$$

M を観測量 m , d で偏微分すると

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial d} = -\frac{5}{\ln 10} \cdot \frac{1}{d}.$$

これを設問 5. の (7) 式に代入して、 M の統計誤差を求める。

$$\begin{aligned} \sigma_M &= \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial m} \right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial d} \right)^2 \sigma_d^2} \\ &= \sqrt{1^2 \cdot 0.2^2 + \left(\frac{5}{\ln 10} \right)^2 \left(\frac{10}{100} \right)^2} \\ &= 0.1 \cdot \sqrt{2^2 + \left(\frac{5}{\ln 10} \right)^2} \\ &\simeq 0.1 \cdot \sqrt{4 + 2.2^2} \\ &\simeq 0.1 \cdot \sqrt{8.8} \simeq 0.3 \end{aligned}$$

以上より、 $M = 1.0 \pm 0.3$ をえる。

(b) 問題文より

$$\begin{aligned} \mu_L &= 0.50, \quad \sigma_L = 0.03 \\ \mu_T &= 0.50, \quad \sigma_T = 0.01 \end{aligned}$$

である。 μ_L と μ_T を代入した時の変数 R の値は

$$\bar{R} = \frac{\sqrt{0.50}}{0.50^2} = 2\sqrt{2} = 2.8 \dots$$

問題文にある R の表式の自然対数をとると

$$\ln R = \frac{1}{2} \ln L - 2 \ln T$$

となる。この両辺を観測量 L , T で偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial L} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{L} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial T} &= -2 \cdot \frac{1}{T}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2} \\ &= \bar{R} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{2\mu_L}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_T}{\mu_T}\right)^2} \\ &= \bar{R} \cdot \sqrt{\left(\frac{0.03}{2 \cdot 0.5}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 0.01}{0.50}\right)^2} \\ &= \frac{\bar{R}}{2 \cdot 0.5} \cdot \sqrt{0.03^2 + 0.04^2} \\ &= \bar{R} \cdot 0.05 \simeq 0.14 \cdots\end{aligned}$$

以上より, $R = 2.8 \pm 0.1$ をえる。

第3問出題意図

質点の回転運動に関する基礎力を問う

第3問解答例

1. 方位角方向の力は

$$F_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial \phi}$$

ポテンシャルが ϕ に依存しないため、 $\partial \Phi / \partial \phi = 0$ 。よって $F_\phi = 0$ 。方位角方向に力が働かないので角運動量が保存される。

2. 円筒座標における全力学エネルギー (Kinetic energy+ Potential energy) は以下の通り。

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + m \Phi(r, z)$$

これを L_z を明示した式として記述したい。

$$L_z = m r^2 \dot{\phi} \rightarrow \dot{\phi} = \frac{L_z}{m r^2} \quad (1)$$

より、

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{L_z^2}{2 m r^2} + m \Phi(r, z)$$

3. 円運動は $\dot{r} = \dot{z} = 0$ なので、第1項、第2項がゼロとなり、第3項と第4項の和 (有効ポテンシャル Φ) が残る。

$$\Phi_{\text{eff}} = \frac{L_z^2}{2 m r^2} + m \Phi(r, z)$$

星が円運動する条件は

$$\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

であり、これを満たす (r_c, z_c) を求める。

z_c :

$$\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{L_z^2}{2 m r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{m a^2}{2} \ln \left(r^2 + \frac{z^2}{q^2} \right) \right]$$

ここで、 L_z は z に依らないので第1項は0。ゆえに、

$$\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial z} = \frac{m a^2 z / q^2}{(r^2 + \frac{z^2}{q^2})}$$

(2) 式の $\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial z} = 0$ より、 $\underline{z_c = 0}$ 。つまり、星は銀河面上を運動する。

r_c :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{L_z^2}{2 m r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{m a^2}{2} \ln \left(r^2 + \frac{z^2}{q^2} \right) \right] \\ &= -\frac{L_z^2}{m r^3} + \frac{m a^2 r}{r^2 + z^2 / q^2} = 0 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{L_z^2}{mr_c^3} = \frac{ma^2 r_c}{r_c^2 + z_c^2/q^2}$$

$z_c = 0$ なので

$$r_c = \frac{L_z}{ma} \quad (3)$$

周期：

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi}{\dot{\phi}} \\ &= \frac{2\pi m r_c^2}{L_z} \\ &= \frac{2\pi r_c}{a} \end{aligned} \quad (4)$$

よって、定数 a は、円運動を行う星の回転速度を表す。

4. ラグランジアン (Kinetic energy- Potential energy) は以下の通り。

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - m\Phi(r, z)$$

$\mathbf{r}$ について：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial r} \right) &= 0 \\ m \frac{d}{dt}(\dot{r}) - mr\dot{\phi}^2 + m \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} &= 0 \\ \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ϕ について：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) &= 0 \\ \rightarrow mr^2\dot{\phi} = \text{const} = L_z \end{aligned} \quad (6)$$

$\mathbf{z}$ について：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right) &= 0 \\ m \frac{d}{dt}(\dot{z}) + m \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial z} &= 0 \\ \ddot{z} + \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

5. 設問 4 の (5) 式に (6) 式 $\dot{\phi} = \frac{L_z}{mr^2}$ を代入

$$\ddot{r} = \frac{L_z^2}{m^2 r^3} - \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \quad (8)$$

右辺をテイラー展開 ($f(r) \simeq f(r_c) + \delta r f'(r_c)$) する。

まず、第 1 項:

$$\frac{L_z^2}{m^2 r^3} \simeq \frac{L_z^2}{m^2 r_c^3} - \frac{3L_z^2}{m^2 r_c^4} \delta r \quad (9)$$

第 2 項:

$$\frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \simeq \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \Big|_{(r_c, z_c)} + \delta r \frac{\partial^2 \Phi(r, z)}{\partial r^2} \Big|_{(r_c, z_c)} \quad (10)$$

$\ddot{r} = \ddot{\delta r}$ とし、(9)(10) 式を (8) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \ddot{\delta r} &= \frac{L_z^2}{m^2 r_c^3} - \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \\ &\simeq \frac{L_z^2}{m^2 r_c^3} - \frac{3L_z^2}{m^2 r_c^4} \delta r - \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \Big|_{(r_c, z_c)} - \delta r \frac{\partial^2 \Phi(r, z)}{\partial r^2} \Big|_{(r_c, z_c)} \\ &= \frac{L_z^2}{m^2 r_c^3} - \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \Big|_{(r_c, z_c)} - \left(\frac{3L_z^2}{m^2 r_c^4} + \frac{\partial^2 \Phi(r, z)}{\partial r^2} \Big|_{(r_c, z_c)} \right) \delta r \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、(5)(6) 式と $\ddot{r}_c = 0$ より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \Big|_{(r_c, z_c)} &= r_c \dot{\phi}^2 \\ &= \frac{L_z^2}{m^2 r_c^3} \end{aligned}$$

よって、(11) 式の第 1 項と第 2 項は消去でき

$$\ddot{\delta r} + \left(\frac{3L_z^2}{m^2 r_c^4} + \frac{\partial^2 \Phi(r, z)}{\partial r^2} \Big|_{(r_c, z_c)} \right) \delta r = 0$$

の単振動の式が得られる。ここで振動数は、

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &= \frac{3L_z^2}{m^2 r_c^4} + \frac{\partial^2 \Phi(r, z)}{\partial r^2} \Big|_{(r_c, z_c)} \\ &= \left(\frac{3}{r_c} \right) \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \Big|_{(r_c, z_c)} + \frac{\partial^2 \Phi(r, z)}{\partial r^2} \Big|_{(r_c, z_c)} \end{aligned} \quad (12)$$

ポテンシャルの 1 階微分と 2 階微分が

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \Big|_{(r_c, z_c=0)} &= \frac{a^2}{r_c} \\ \frac{\partial^2 \Phi(r, z)}{\partial r^2} \Big|_{(r_c, z_c=0)} &= -\frac{a^2}{r_c^2} \end{aligned}$$

なので、(12) 式より

$$\omega_r = \sqrt{2} \frac{a}{r_c} \quad (13)$$

同様に、 z の式テイラー展開より

$$\ddot{\delta z} + \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial z} \Big|_{(r_c, z_c=0)} + \delta z \frac{\partial^2 \Phi(r, z)}{\partial z^2} \Big|_{(r_c, z_c=0)} = 0$$

ここで、

$$\frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial z} \Big|_{(r_c, z_c=0)} = \frac{za^2}{q^2(r^2 + z^2/q^2)} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(r, z)}{\partial z^2} \Big|_{(r_c, z_c=0)} = \frac{a^2}{q^2} \frac{r^2 - z^2/q^2}{(r^2 + z^2/q^2)^2} = \frac{a^2}{q^2 r_c^2} \quad (15)$$

運動方程式は

$$\ddot{\delta z} + \frac{a^2}{q^2 r_c^2} \delta z = 0$$

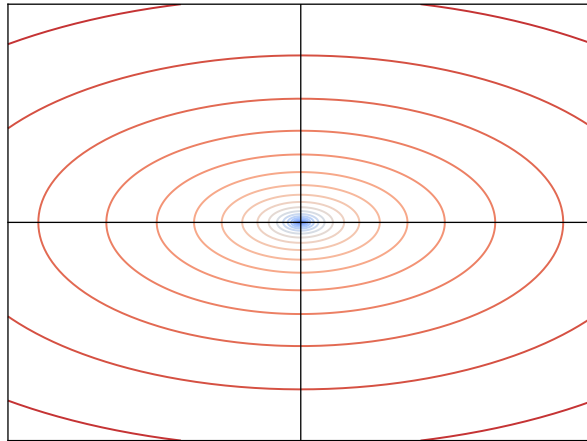
が得られ、振動数は、

$$\omega_z = \frac{a}{q r_c} \quad (16)$$

6. (a) 設問 5 の (13)(16) 式の比より

$$q = \frac{\omega_r}{\omega_z} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{0.8 \times 10^8}{1.6 \times 10^8} \frac{1}{\sqrt{2}} \sim 0.4$$

(b) 図の通り。



第4問出題意図

電磁波に関する基礎知識を問う

第4問解答例

1. 真空中は $\rho = 0$ 、 $i = 0$ 。 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ が成り立つので、マクスウェルの方程式は

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

とかける。

$$\mathbf{E} = (E_x(z, t), 0, 0)$$

のとき

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = -\mu_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

静磁場は考えないので、 $\mathbf{H} = (0, H_y(z, t), 0)$ 、電場ベクトルと直交する。

- 2.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H_y}{\partial z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

上式の第二成分を時間微分して

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

より、

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0.$$

同様に、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = -\mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$$

より、

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0.$$

以上により、 E_x 、 H_y はそれぞれ位相速度 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ で z 方向に伝搬する波を表す波動方程式を満たす。

- 3.

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = -\frac{k}{\mu_0} E_0 \sin(\omega t - kz)$$

より、

$$H_y = \frac{1}{\mu_0} \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kz) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos(\omega t - kz).$$

$\omega/k = c$ を用いた。

電場と磁場は互いに直交するので、 $\mathbf{S}$ は z 成分のみをもち、

$$S_z = E_x H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \frac{1 + \cos 2(\omega t - kz)}{2}$$

これを時間平均して

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left(0, 0, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \right).$$

4. 電磁波は単位時間あたり c 進む。全反射するとき、直入射する電磁波が物体におよぼす単位面積あたりの力積は $2qc = 2S/c_0$ 。圧力は、単位面積あたりに働く力なのでこれが放射圧となる。
5. (a) 式 (7) では、電磁波が伝搬方向 (z 方向) に運ぶ時間平均したエネルギー

$$\langle \mathbf{S} \rangle_z = S_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2$$

を求めた。これが、単位面積、単位時間あたりに太陽から受ける平均的な放射エネルギーに対応する ($S_z = 1.4 \times 10^3$)。よって、

$$E_0 = \sqrt{\frac{2}{c\epsilon_0}} S_z = \sqrt{\frac{2 \times 1.4 \times 10^3}{3.0 \times 10^8 \times 8.9 \times 10^{-12}}} \sim \sqrt{\frac{2 \times 4 \times 10^6}{9}} \sim 1 \times 10^3 \text{ [N/C] or [V/m]}$$

$$B_0 = \mu_0 H_0 = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} E_0 = \frac{E_0}{c} \sim 3 \times 10^{-6} \text{ [T]}.$$

- (b) 透過や散乱がなく反射率 0.5 で反射した電磁波が、物体におよぼす単位面積あたりの力積、つまり放射圧は $1.5qc = 1.5S/c$ と表せる。(a) と同様、 $S = S_z = 1.4 \times 10^3$ なので、

$$P = \frac{1.5S}{c} = \frac{1.5 \times 1.4 \times 10^3}{3.0 \times 10^8} = 7.0 \times 10^{-6} \text{ [N/m}^2\text{]}$$

第5問出題意図

熱統計力学に関する応用力を問う

第5問解答例

1. (a) 熱力学の第一法則より、内部エネルギー、仕事、熱量の変化の間には、次の関係が成り立つ。

$$dU = dW + dQ$$

ここで、圧力一定のもとで体積が dV 変化するとき、気体になされた仕事は以下で表される。

$$dW = -pdV$$

今、気体が状態 A から状態 B に移る過程において、熱量の流出入はないので、 $dQ = 0$ 。
よって、内部エネルギーの変化は、高压側で気体を押し出す時になされた仕事と低压側で押し出された気体のした仕事の差で表される

($dU = dW$)。

$$\therefore U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2$$

$$\therefore U_2 + p_2 V_2 = U_1 + p_1 V_1$$

$\therefore$ エンタルピー $H = U + pV$ は一定に保たれる。

- (b) i. エンタルピーを全微分すると

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp$$

ここで、エンタルピーは一定であるから、 $dH = 0$

$$\text{よって } \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp = 0 \text{ より } \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H = - \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p}$$

- ii. $H = U + pV$ より

$$dH = dU + pdV + Vdp = dQ + Vdp = TdS + Vdp$$

(ここで $dU = -pdV + dQ$, $dQ = TdS$ を用いた。)

$$\therefore \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T + V$$

ここで、熱力学ポテンシャル $G = H - TS$ より

$$dG = dH - TdS - SdT = TdS + Vdp - TdS - SdT = Vdp - SdT$$

($dH = TdS + Vdp$ を用いた)

これより

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T = V, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = -S$$

$$\therefore \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

$$\therefore \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + V$$

- iii. 定圧比熱の定義より、

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p$$

($dQ = TdS$ を用いた)

ここで、 $dH = TdS + Vdp$ より、圧力一定のもとで

$$C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p$$

(c) 理想気体において $pV = nRT$

$$\text{よって、} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{nR}{p} = \frac{V}{T}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H = \frac{1}{C_p} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V \right] = 0$$

$\therefore$ このとき、温度変化なし。

2. (a) エネルギー E_n を取る確率は p_n であるから、エネルギーの期待値は、

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n p_n = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp(-\beta E_n)$$

ここで $Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n)$ より $\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp(-\beta E_n)$ であるから、

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log_e Z$$

(b) $E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \epsilon$ のとき、状態和は、

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-\beta \left(n + \frac{1}{2} \right) \epsilon \right] = \exp(-\beta \epsilon / 2) \sum_{n=0}^{\infty} [\exp(-\beta \epsilon)]^n = \frac{\exp(-\beta \epsilon / 2)}{1 - \exp(-\beta \epsilon)}$$

$$\therefore \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log_e Z = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{\beta \epsilon}{2} - \log_e [1 - \exp(-\beta \epsilon)] \right\} = \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon \exp(-\beta \epsilon)}{1 - \exp(-\beta \epsilon)}$$

(c) $\epsilon \ll k_B T = 1/\beta$ のとき $\beta \epsilon \ll 1$ より

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{\exp(\beta \epsilon) - 1} \approx \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{1 + \beta \epsilon + (\beta \epsilon)^2 / 2 - 1} \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\beta \epsilon}{2} \right)^{-1} \approx \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\beta \epsilon}{2} \right) = \frac{1}{\beta} = k_B T \end{aligned}$$