

総合研究大学院大学先端学術院先端学術専攻
天文科学コース 五年一貫制博士課程
Graduate University for Advanced Studies, SOKENDAI
Astronomical Science Program
5-year doctoral program

2026 年度 4 月入学者選抜試験
The entrance examination for April 2026 admission

筆記試験（専門科目）問題
Written examination (Specialized subjects)

2025 年 8 月 27 日
August 27, 2025

以下の全ての問いに解答せよ。

Answer all the following questions.

解答は解答用紙に記入すること。

Answers must be placed in the answer sheets.

解答用紙とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。

All question sheets as well as the draft and answer sheets are to be collected at the end of the exam. Do not forget to provide your application number at the top of all draft and answer sheets as well as the cover sheet.

受験番号(Application No.) :

氏名(Full Name) :

第 1 問

以下の設問に答えよ。解答は導出の過程がわかるように記述すること。なお、 i は虚数単位を表す。

1. 複素数 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ がある。全ての整数 n 、実数 θ について、

$$z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (1)$$

が成り立つことが知られている (ド・モワブルの公式)。

(i) 0 および全ての正の整数 n に対して式 (1) が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(ii) 全ての負の整数 n に対して式 (1) が成り立つことを証明せよ。

2. 式 (1) を用いて、1 の n 乗根 (n は自然数) をすべて求めることを考える。方程式 $x^n = 1$ の解を $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と置く。このとき、 $r = 1$ 、 $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ であることを示せ。ここで $k = 0, 1, \dots, n-1$ である。
3. 1 の 3 乗根をすべて求めよ。また、得られた 1 の 3 乗根すべてを複素平面上に描け。その際、3 乗根それぞれの偏角と絶対値を明示せよ。偏角の単位はラジアンまたは度を用いること。
4. $-i$ の 3 乗根をすべて求めよ。
5. 設問 3 で求めた 1 の 3 乗根のうち、1 乗または 2 乗しても 1 とはならず、3 乗すれば 1 となるものを「1 の原始 3 乗根」という。「1 の原始 3 乗根」すべてに対して、その 3 乗根をすべて求めよ。なお、解答には $\sin$ と $\cos$ を含んでもよい。
6. 自然数 m と n が互いに素である時、1 の原始 m 乗根と、1 の原始 n 乗根の積は、1 の原始 mn 乗根であることを示せ。なお、1 の原始 k 乗根 (k は自然数) とは、 $1, 2, \dots, k-1$ 乗しても 1 にならないが、 k 乗すれば 1 になる数を指す。

第2問

以下の設問に答えよ。なお、 e は自然対数の底を表す。

1. 二次元積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \quad (a \text{ は正の定数}) \quad (1)$$

を極座標に座標変換して実行することで、ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$ を求めよ。

2. 確率変数 X が、平均 μ 、標準偏差 σ ($\sigma \neq 0$ とする) のガウス分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ に従う時、すなわち X の確率密度関数 $p(X)$ が

$$p(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2)$$

と表されるとき、変数 $Y = aX$ (a は 0 以外の実数の定数) もガウス分布に従うことを示せ。また、 Y の平均と標準偏差を求めよ。

3. 確率変数 X_1 ($-\infty < X_1 < \infty$) と X_2 ($-\infty < X_2 < \infty$) の確率密度関数を、それぞれ $p_1(X_1)$ 、 $p_2(X_2)$ とする。 X_1 と X_2 が互いに独立であるとき、2つの変数の和 $Y = X_1 + X_2$ の確率密度関数 $p(Y)$ は、 $p_1(X_1)$ と $p_2(X_2)$ の畳み込み積分

$$p(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(Y-x)p_2(x)dx \quad (3)$$

で表される。このことを用いて、独立な確率変数 X_1 と X_2 がそれぞれガウス分布 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ と $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ に従う ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$ とする) とき、それらの和 $Y = X_1 + X_2$ もガウス分布に従うことを示し、その平均と標準偏差を求めよ。

4. k 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_k$ がそれぞれガウス分布 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1), \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2), \dots, \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k)$ に従う ($\sigma_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, k$ とする) とき、それらの線型結合

$$Y = \sum_{i=1}^k a_i X_i \quad (a_1, a_2, \dots, a_k \text{ は } 0 \text{ 以外の実数の定数}) \quad (4)$$

の平均と標準偏差を求めよ。

5. k 個の独立な確率変数 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ で決まる量 f の標準偏差 σ_f を考える。 f は $\mathbf{X}$ の関数であり、その関数形

$$f = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

は既知とする。各確率変数 X_i ($i = 1, 2, \dots, k$) は、それぞれガウス分布 $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ に従う ($\sigma_i \neq 0$ とする) と仮定する。このとき、関数 $f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ を各変数の平均値 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ のまわりでテイラー展開すると

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2, \dots, X_k) &= f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial X_1} \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}} (X_1 - \mu_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_k} \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}} (X_k - \mu_k) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

となるが、各確率変数の平均からの差 $\{(X_i - \mu_i)\}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) が十分小さいとして2次以上の項を省略すると、 $f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ は

$$\tilde{f}(X_1, X_2, \dots, X_k) = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) + \frac{\partial f}{\partial X_1} \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}} (X_1 - \mu_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_k} \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}} (X_k - \mu_k) \quad (6)$$

と近似される。このことを用いて、 $f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ の分布の標準偏差が

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right)^2 \sigma_i^2} \quad (7)$$

と近似されることを示せ。

6. (a) 独立な観測量 m と d が、 $m = 6.0 \pm 0.2$ (測定値が 6.0、誤差が 0.2であることを表す。以下同様)、 $d = (1.0 \pm 0.1) \times 10^2$ と測定されている時、物理量

$$M = m - 5 \log_{10} d + 5 \quad (8)$$

を誤差付きで求めよ (誤差の有効数字を 1 桁とせよ)。なお各観測量は、与えられた測定値、誤差をそれぞれ平均、標準偏差とするガウス分布に従う確率変数であるとみなして良い。また、必要ならば $\log_e(10) = 2.3 \dots$ を用いよ。

- (b) 独立な観測量 L と T が、 $L = 0.50 \pm 0.03$ 、 $T = 0.50 \pm 0.01$ と測定されている時、物理量

$$R = \frac{\sqrt{L}}{T^2} \quad (9)$$

を誤差付きで求めよ (誤差の有効数字を 1 桁とせよ)。なお各観測量は、与えられた測定値、誤差をそれぞれ平均、標準偏差とするガウス分布に従う確率変数であるとみなしてよい。

第3問

銀河の連続的な重力ポテンシャル $\Phi(r, z)$ ((1) 式) のもとで、銀河中心を周回する質点 m の運動を考える。

$$\Phi(r, z) = \frac{a^2}{2} \ln \left(r^2 + \frac{z^2}{q^2} \right) \quad (1)$$

ここで a, q は実定数、 r は銀河中心からの距離、 z は銀河平面からの高さである。以下の問いに答えよ。
 なお、解答を記述する際の座標系として円筒座標 (r, ϕ, z) を用いること。 ϕ は方位角である。

1. 質点の z 方向の角運動量 (L_z) が保存することを示せ。
2. 質点の全力学的エネルギー E を書き出せ。このとき、 $\Phi(r, z)$ および角運動量 L_z が明示的に現れるように記述すること。
3. 設問 2 で得られた全力学的エネルギーの式を用いて以下の設問に答えよ。
 - (a) 質点が安定な円運動を行うときの (i) 銀河面からの高さ (z_c)、および (ii) 軌道半径 (r_c) を書き表せ。なお、必要に応じて L_z, m, a を用いよ。
 - (b) この円運動の周期を求めよ。
 - (c) 設問 3(b) の結果より、定数 a がどのような物理量を表すか説明せよ。
4. 質点 m のラグランジアン $\mathcal{L}$ を書き出せ。また、 $\mathcal{L}$ を用いて、質点の運動方程式を導出せよ。
5. 実際の銀河の星は完全な円軌道を描くことはなく、動径方向および鉛直方向に振動しながら銀河中心を周回する。時刻 t における動径方向の微小なずれを $\delta r(t)$ 、鉛直方向の微小なずれを $\delta z(t)$ とすると、質点の運動は $r(t) = r_c + \delta r(t)$ 、 $z(t) = z_c + \delta z(t)$ で表される。このときの、 $\delta r(t)$ および $\delta z(t)$ の角振動数 (ω_r, ω_z) を求めよ。 $\delta r(t) \ll r_c, \delta z(t) \ll qz_c$ とする。
6. 質点が動径方向に 1.6×10^8 年の周期で振動し、鉛直方向に 0.8×10^8 年の周期で振動すると仮定する。
 - (a) q の値を有効数字 1 桁で求めよ。
 - (b) (1) 式で表される重力ポテンシャル $\Phi(r, z)$ の等ポテンシャル面の概形を、縦軸 z 、横軸 r の平面上に等高線の形で図示せよ。

第 4 問

マクスウェルの方程式は

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

であたえられる。 $\mathbf{E}$ は電場、 $\mathbf{D}$ は電束密度、 $\mathbf{B}$ は磁束密度、 $\mathbf{H}$ は磁場、 $\mathbf{i}$ は電流密度、 ρ は電荷密度である。以下、電荷も電流もない真空中の電磁場を考える。真空中の誘電率は $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} [\text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}]$ 、透磁率は $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{N} \cdot \text{A}^{-2}]$ である。解答は導出の過程がわかるように記述すること。

1. x 軸, y 軸, z 軸の 3 軸から構成される右手系の直交座標系において、時刻 t における電場 $\mathbf{E}$ が

$$\mathbf{E} = (E_x(z, t), 0, 0) \quad (5)$$

と表せるとする。このとき、磁場ベクトルは電場ベクトルと直交することを示せ。静電場および静磁場は考えないものとする。

2. 電場と磁場それぞれが、位相速度 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 3.0 \times 10^8 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$ で z 方向に伝搬する波を表す波動方程式を満たすことを示せ。

3. 前の設問で求めた波動方程式の解

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (6)$$

を考える (ω は角振動数、 k は波数)。単位時間、単位面積あたりの電磁波のエネルギーの流れはポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ で表される。時間平均したポインティングベクトルが

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left(0, 0, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \right) \quad (7)$$

と表せることを示せ。

4. 電磁波が物体にあたった時に働く圧力を放射圧と呼ぶ。電磁波は単位体積あたり

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \quad (8)$$

で与える運動量を運ぶことから、電磁波が物体に直入射 (入射角 0°) し完全に反射されるとき放射圧が

$$P = \frac{2S}{c} \quad (9)$$

であることを説明せよ。

5. 大気圏外の地球軌道上で、単位面積、単位時間あたりの太陽から受ける平均的な放射エネルギーは $1.4 \times 10^3 [\text{W} \cdot \text{m}^{-2}]$ である。このとき、以下の設問に答えよ。

- (a) 式 (6) で示される電場を持つ電磁場を考え、電場の振幅 E_0 、磁束密度の振幅 B_0 それぞれを有効数字 1 桁で求めよ。単位について、必要があれば $[\text{J}] = [\text{N} \cdot \text{m}]$ であることを使ってよい。
- (b) 大気圏外の地球軌道上で、太陽からの電磁波が反射率 0.5 の物体に直入射し反射されたときに物体が受ける放射圧を有効数字 2 桁で求めよ。なお、透過や散乱はないものとする。

第 5 問

1. 図 1 のように、気体の入った管が、綿を詰めた栓（綿栓）で区切られている。気体は綿栓を高圧側から低圧側にゆっくり通過出来るが、綿栓の両側の圧力は異なった状態を保つことが出来る。綿栓通過前に圧力 p_1 のもとで体積 V_1 をしめている状態（状態 A）にある気体が、綿栓通過後に圧力 p_2 のもとで体積 V_2 の状態（状態 B）となった状況を考える。ピストンの位置を調節することで、綿栓の両側で、気体の圧力 p_1 、 p_2 ($p_1 > p_2$ とする) はそれぞれ一定に保たれている。また、綿栓を通過中の気体の体積は無視出来るものとし、管と外部の間の熱の流出入はないものとする。

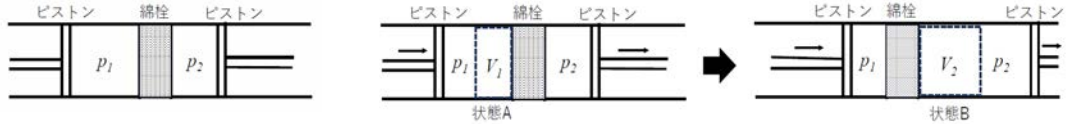


図 1:

- (a) 熱力学の第一法則より、気体が状態 A から状態 B に移る過程において、この気体のエンタルピー $H = U + pV$ が一定に保たれることを示せ。ここで、 U は内部エネルギー、 p は圧力、 V は体積を表す。
- (b) 以下の手順により、この過程における温度 T の変化が以下の式で表されることが示せる。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{C_p} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V \right] \quad (1)$$

ここで、 C_p は定圧熱容量、また、例えば $(\partial x / \partial y)_z$ は、変数 x の変数 y による微分が変数 z が一定のもとで行われることを表す。

- i. この過程においてエンタルピーが一定に保たれることより、以下の式が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = - \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p} \quad (2)$$

- ii. 以下の式が成り立つことを示せ。必要であれば、 $dQ = TdS$ (ここで、 Q は熱量、 S はエントロピー)、および熱力学ポテンシャル $G = H - TS$ を用いてよい。

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V \quad (3)$$

- iii. 定圧熱容量 C_p が以下のように表されることを示せ。

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \quad (4)$$

- (c) この気体が理想気体の状態方程式に従う場合、温度 T の変化がないことを示せ。

2. 熱平衡状態にある理想気体を、カノニカル分布に従う系として考える。このとき、温度 T の系があるエネルギー状態 E_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を取る確率 p_n は、以下のように表される。

$$p_n = \frac{\exp(-\beta E_n)}{Z} \quad (5)$$

ここで、 $\beta \equiv (k_B T)^{-1}$ 、 k_B はボルツマン定数である。また、 Z は以下の式で与えられる状態和を表す。

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n) \quad (6)$$

(a) このとき、エネルギーの期待値は以下の式で表されることを示せ。

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log_e Z \quad (7)$$

(b) $E_n = (n + \frac{1}{2})\epsilon$ で表されるとき、エネルギーの期待値を β と ϵ のみを用いて表せ。

(c) (b) のとき、 $\epsilon \ll k_B T$ の極限において、エネルギーの期待値が $k_B T$ に近づくことを示せ。