総合研究大学院大学先端学術院先端学術専攻
天文科学コース　五年一貫制博士課程
Graduate University for Advanced Studies, SOKENDAI
Astronomical Science Program
5-year doctoral program

2025 年度 4 月入学者選抜試験
The entrance examination for April 2025 admission

筆記試験（専門科目）問題
Written examination (Specialized subjects)

2024 年 8 月 21 日
August 21, 2024

以下の全ての問いに解答せよ。
Answer all the following questions.

解答は解答用紙に記入すること。
Answers must be placed in the answer sheets.

解答用紙とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。
All question sheets as well as the draft and answer sheets are to be collected at the end of the exam. Do not forget to provide your application number at the top of all draft and answer sheets as well as the cover sheet.

受験番号(Application No.)：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名(Full Name)：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第１問

3 次元空間内に曲面 S が

$$x^2+y^2-z^2+1=0 \ \ (x,y,z \text{ は実数で } z>0)$$

で与えられているとする。また、S 上の **2** 点 $(x,y,z)=(0,0,1)$、$(x,y,z)=(\sqrt{2},1,2)$ をそれぞれ点 A、点 B とする。このとき、以下の設問に答えよ。

1. 長さが 0 でないベクトル $\boldsymbol{a}$ が x 軸、y 軸、z 軸となす角を α、β、γ とするとき、$l=\cos\alpha$、$m=\cos\beta$、$n=\cos\gamma$ を $\boldsymbol{a}$ の方向余弦という。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の方向余弦 (l,m,n) と α、β、γ を求めよ。

2. 曲面 S の外向き（$x^2+y^2-z^2+1>0$ の方向）の単位法線ベクトルを求めよ。z を消去した形で書くこと。

3. 曲面 S の点 B における接平面を求めよ。

4. ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ が、$\boldsymbol{F}=2z\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$ で与えられる。ただし、x 方向、y 方向、z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ とし、$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$ であるとする。

   (a) 曲面 S と平面 $z=2$ の交線を C とする。C についての線積分

   $$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

   を求めよ。

   (b) C についての線積分

   $$\int_C \boldsymbol{F}\times d\boldsymbol{r}$$

   を求めよ。

   (c) 曲面 S と平面 $z=2$ で囲まれる領域を V、この V を囲む閉曲面を S' とおく。このとき、

   $$\iint_{S'} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS'$$

   を求めよ。なお、$\boldsymbol{n}$ は閉曲面 S' の外向き単位法線ベクトルである。

$\boxed{\text{第 2 問}}$

最小二乗法は実験結果の回帰分析によく用いられるが、ある関数を別の関数で近似しようとする際にも利用できる。

区間 $[-\pi, \pi]$ のすべての実数 x について定義された実関数 $f(x)$ がある。この実関数 $f(x)$ を別の実関数 $F_n(x)$ で近似することを考える。近似に用いられる代表的な関数のひとつが、三角関数の線形結合である。

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

n は 2 以上の整数、$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ は全て実数である。

$F_n(x)$ の $f(x)$ に対する残差の二乗平均 E は次式のように表わされる。

$$E(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - F_n(x)]^2 dx \tag{2}$$

関数 $F_n(x)$ が関数 $f(x)$ の最も良い近似となるためには、式 (1) の係数 a_k と b_k それぞれについて、式 (2) の残差の二乗平均 E が最小となるような値を見つけてやればよい。

このとき以下の問いに答えよ。解答を記述する際には、簡単のため、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ を $\sum$、$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}$ を $\int$ と略記してよい。

1. (i) 残差の二乗平均 E には最小値があり、その最小値は $a_k (k = 0, 1, \ldots, n)$ と $b_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ それぞれの偏微分 $\dfrac{\partial E}{\partial a_k}$ および $\dfrac{\partial E}{\partial b_k}$ がゼロになる時に得られる。その理由を簡潔に説明せよ。

   (ii) E を最小にする a_0 を求めよ。

   (iii) E を最小にする $a_k (k = 1, \ldots, n)$ と $b_k (k = 1, \ldots, n)$ を求めよ。

2. $f(x)$ が以下の関数のとき、a_0、$a_k (k = 1, \ldots, n)$、$b_k (k = 1, \ldots, n)$ をそれぞれ求めよ。

   (i) $x \cos x$

   (ii) x^2

3. 次の無限級数の和を計算せよ。上の小問 2 の結果を利用してよい。また、その際 $n \to \infty$ の極限においては、$F_n(x)$ は $f(x)$ のフーリエ級数に、a_0、a_k、b_k はそのフーリエ係数に等しくなることを利用してよい。

   (i) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$

   (ii) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(2m+1)}{(2m+1)^2 - 1}(-1)^m$

第3問

以下の設問に答えよ。回答は導出の過程がわかるように記述し、計算を求められるときは、計算結果を有効数字2桁で示すこと。なお、真空中の光速 $c = 3.0 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$、電子質量 $m_\mathrm{e} = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ とする。また、$1\,\mathrm{GeV} = 10^9\,\mathrm{eV}$、$1\,\mathrm{nm} = 10^{-9}\,\mathrm{m}$ である。

$S(x, y, z, t)$ 系とそれに対して相対論的な速さ V で x 方向に移動する $S'(x', y', z', t')$ 系という2つの慣性系について考える。簡単のため、$V = 0$ のときに S 系と座標系が一致するように S' 系の座標系を定義すると、この二つの座標系間のローレンツ変換は、ローレンツ因子を $\gamma = 1/\sqrt{1-(V/c)^2}$ として、$x' = \gamma(x - Vt)$、$y' = y$、$z' = z$、$t' = \gamma(t - Vx/c^2)$ と記述される。また、ある慣性系で静止質量 m、速度 $\boldsymbol{v}$ の粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$、またそのエネルギー E は $E = \gamma mc^2$ となる。

1. 相対論的速度で等速運動する粒子について答えよ。

   (a) 粒子のエネルギー E、運動量 $\boldsymbol{p}$、静止質量 m の間に成り立つ関係を求めよ。

   (b) S' 系で x' 方向に速さ v'_x で等速運動する粒子を S 系から観測する場合、その粒子の速さ v_x を上記のローレンツ変換を利用して求めよ。

2. 以下の高エネルギー現象について答えよ。

   (a) ある荷電粒子を静止状態から一定電場で加速したときに、その最終速度が光速の60%に達した。この粒子と同電荷をもち、質量が1/8の粒子を静止状態から同じ電場で加速した場合を考える。このとき得られる粒子の最終速度は光速の何%か。

   (b) クーロン力に打ち勝つような同じ速さで2つの陽子 p が正面衝突したとする。この時、その速さが十分であれば $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} + \mathrm{p} + \mathrm{p}$ という反陽子 $\bar{\mathrm{p}}$ の生成反応が起こる。簡単のため、陽子と反陽子の静止質量をエネルギー単位で $1\,\mathrm{GeV}$ として、この反応に必要な陽子一個あたりの最低運動エネルギーを GeV 単位で求めよ。

   (c) 実験室系で静止する陽子に高エネルギー陽子を衝突させ、上記の反陽子生成反応を起こすために必要な高エネルギー陽子の最低運動エネルギーを GeV 単位で求めよ。

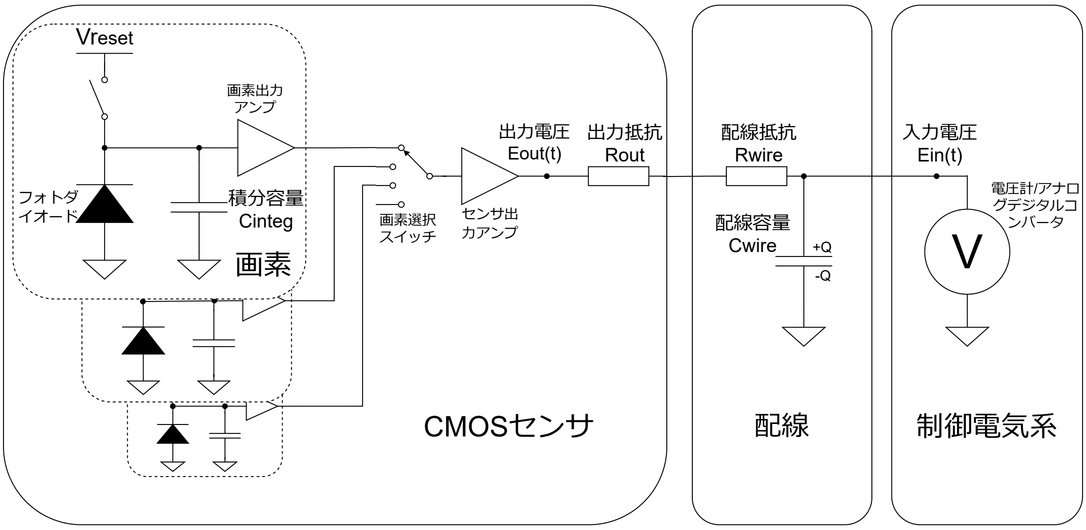
3. 原子に弱く束縛され、静止状態とみなせる電子にX線を照射すると、散乱されたX線の波長が変化する現象が知られている。$\boldsymbol{e}_1$ 方向へ向けて電子に入射したX線の波長を λ_1、$\boldsymbol{e}_2$ 方向に散乱されたX線の波長を λ_2 とする。ここで、$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ は単位ベクトルである。

   (a) 反応後の電子の運動量ベクトルを $\boldsymbol{q}$ として、散乱前後で成立するエネルギー保存則と運動量保存則をそれぞれ示せ。

   (b) 得られたエネルギー・運動量保存の関係式を解くことで、散乱角 θ ($\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \equiv \cos\theta$) の方向に散乱されたX線の波長変化量を θ の関数として求め、散乱光子の波長が長波長側にずれることを示せ。また、$\theta = 90^\circ$ のときの波長変化量を計算して nm 単位で示せ。この波長変化量は電子的世界の基本となる長さを表す。

第 4 問

下記は近年天文観測でよく使われるようになった CMOS イメージセンサをつかった光計測回路の概略図である。これを参照しつつ、以下の設問に答えよ。また、解答の数値は有効数字 2 桁とせよ。



1. フォトダイオードはバンドギャップ (E_{g}) と呼ばれるエネルギーよりも大きなエネルギーを持つ光子を吸収し、一対の電子正孔ペアを生成する。この電子正孔ペアをフォトダイオード両端に印加された電圧により分離し電流として取り出すことで、光を検知することができる。

   (a) バンドギャップエネルギー E_{g} を持つフォトダイオードが検知できる光子の最大波長 (カットオフ波長)λ_c を光速 c とプランク定数 h を用いて表せ。

   (b) 半導体として重要なシリコンの持つバンドギャップエネルギーは $1.1\,\mathrm{eV}$ 程度である。シリコンを用いたフォトダイオードのカットオフ波長を求めよ。ただし、光速 c を $3.0\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$ 、プランク定数 h を $6.6\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$、素電荷 q を $1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ とする。なお、$1\,\mathrm{eV}$ は電子一個が $\mathbf{1\,V}$ の電位差を他に外力が働かない状況で移動する際に得るエネルギーに相当する。

   (c) シリコンフォトダイオードは可視光線 (波長 0.4 から 0.7 μm) に感度を持ち得るか理由と共に述べよ。($1\,\mu\mathrm{m}=10^{-6}\,\mathrm{m}$)

2. フォトダイオードで生成した光電流は積分容量 C_{integ} により蓄積され、電圧信号に変換される.

   (a) 誘電率 ε の誘電体と、面積 S、間隔 d の平行平板で形成された電気容量 C は $C=\varepsilon S/d$ で表される。これを Maxwell の方程式を用いて導け。

$$
\begin{cases}
\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\rho\\
\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\\
\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0\\
\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\\
\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\boldsymbol{E}\\
\boldsymbol{B}=\mu_{\mathrm{r}}\mu_0\boldsymbol{H}
\end{cases}
\tag{3}
$$

   なお、$\boldsymbol{D}$ は電束密度、$\boldsymbol{E}$ は電場の強度、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度、$\boldsymbol{H}$ は磁場の強度、ρ は 電荷密度、$\boldsymbol{j}$ は 電流密度、ε_0 は真空の誘電率で $8.8\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$、$\varepsilon_r$ は比誘電率。μ_0 は真空の透磁率で $1.2\times10^{-6}\,\mathrm{H/m}$、$\mu_r$ は比透磁率である。

(b) 画素の大きさを $10\,\mu\mathrm{m} \times 10\,\mu\mathrm{m}$ とする。積分容量の面積を画素の面積の **25%**としたときの積分容量 C_{integ} を求めよ。平行平板の間隔 d は $0.1\,\mu\mathrm{m}$ とし、平行平板電極間の誘電体の比誘電率 ε_r は窒化シリコンの値 ($\varepsilon_{r\mathrm{SiN}} = 7$) とする。また、電子一個が蓄積されたとき積分容量に印加されている電圧の変化量を求めよ。

3. 多画素化により各画素の信号を高速に処理する必要が発生している。例えば 100 万画素の CMOS センサの信号を 1 秒間で読み出すには、1 画素あたり $1\,\mu\mathrm{s}$ で処理する必要がある。そのため配線による信号の遅延を考慮する必要がある。($1\,\mu\mathrm{s} = 10^{-6}\,\mathrm{s}$)

(a) センサ出力アンプの出力電圧を $E_{\mathrm{out}}(t)$、出力抵抗を R_{out}、配線の抵抗を R_{wire}、制御電気系の入力での電圧を $E_{\mathrm{in}}(t)$ とする。センサ出力アンプから配線容量に流れる電流を $i(t)$ としたとき、$E_{\mathrm{out}}(t)$ を R_{out}、R_{wire}、$E_{\mathrm{in}}(t)$、$i(t)$ を使って書き表せ。ただし、制御電気系への電流の流れ込みは無視する。

(b) 配線容量に蓄積されている電荷を $Q_{\mathrm{wire}}(t)$ とする。$Q_{\mathrm{wire}}(t)$ を $Q_{\mathrm{wire}}(0)$ と $i(t)$ を使って書き表せ。

(c) 容量 C に蓄積されている電荷 Q と印加されている電圧 V には $Q = CV$ の関係がある。配線の容量を C_{wire} としたとき、$Q_{\mathrm{wire}}(t)$ を C_{wire}、$E_{\mathrm{in}}(t)$ をつかって書き表せ。

(d) $E_{\mathrm{out}}(t)$、R_{out}、R_{wire}、C_{wire}、$i(t)$ の間に成り立つ微分方程式を求めよ。

(e) 画素 1 の信号電圧を E_1、画素 2 の信号電圧を E_2 とする。時刻 $t = 0$ で画素 1 から画素 2 に切り替わる場合、センサ出力アンプの出力電圧は

$$\begin{cases} E_{\mathrm{out}}(t) & = & E_1 \quad (t < 0) \\ & = & E_2 \quad (t \geq 0) \end{cases} \tag{4}$$

となる。この時、$E_{\mathrm{in}}(t)$ を求めよ。ただし、$t = 0$ において $E_{\mathrm{in}}(0) = E_1$ とする。

(f) $E_{\mathrm{out}}(t)$ と $E_{\mathrm{in}}(t)$ の差の絶対値が E_1 と E_2 の差の絶対値の $1/e$ となるまでの時間を求めよ。ただし e は自然対数の底とする。また、$1/2^{16}$ となるまでの時間を求めよ。必要ならば $\log_e 2 = 0.69$ と近似してよい。

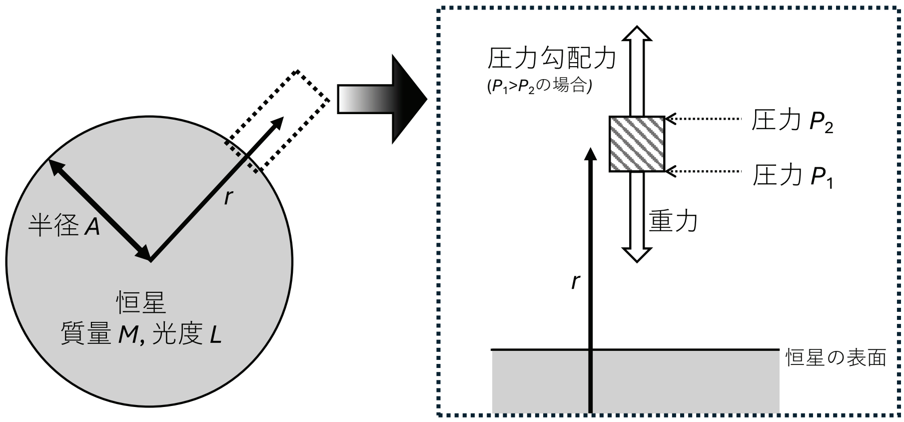
(g) R_{out} が $1\,\mathrm{k\Omega}$、C_{wire} が **1 m** あたり **100 pF**、R_{wire} は無視できることとする。この時、E_1 と E_2 の差の絶対値が **1V** の時、$E_{\mathrm{out}}(t)$ と $E_{\mathrm{in}}(t)$ の差の絶対値が 1 画素を読み出す時間 ($1\,\mu\mathrm{s}$) 以内に、$1/2^{16}\,\mathrm{V}$ 以下となるための配線の長さの最大値を求めよ。($1\,\mathrm{pF} = 10^{-12}\,\mathrm{F}$)

第 5 問

質量 M、半径 A、光度 L（恒星全体からの単位時間あたりの放射エネルギー）の恒星を考える。この恒星の大気 (恒星中心からの距離が A より遠い領域) に関して、以下の問いに答えよ。回答は導出の過程がわかるように記述すること。

以下の設問では、大気を含む恒星の構造は球対称を仮定し、大気の全質量は M と比べて非常に小さいため、大気の自己重力は無視できるとする。さらに自転の効果も無視する。また大気は理想気体であるとし、状態方程式 $P = (\rho/\tilde{\mu})\mathcal{R}T$ に従うとする。ここで P、ρ、T はそれぞれ大気の圧力、密度、温度である。$\mathcal{R}$ は気体定数 [単位: $\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$]。$\tilde{\mu}$ は大気を構成する粒子の平均モル質量 [単位: $\mathrm{kg\,mol^{-1}}$] で、定数と仮定する。さらに万有引力定数は G で示す。

1. (a) 恒星大気に対する最も簡単な近似は、流れがなく、恒星中心から距離 r にある流体要素には圧力勾配力と重力のみが働いており、それらが釣り合っている状態 (下図参照) を考えることである。この状態での、動径方向に関する単位体積あたりの力の釣り合いの式を P、G、M、ρ と r を使って示せ。



左図: この問題で想定している系、右図: 左図の点線で書かれた四角部分の拡大図。恒星中心から距離 r にある流体要素 (斜線で示された四角) とそれに働いている圧力勾配力と重力が示されている [1.(a),(b) にて考えている状態]。1.(c),(d),(e) で考慮する放射圧は、$P_1 > P_2$ 時の圧力勾配力と同じように、右図内で上方向への力となる。

(b) 大気が等温とみなせるとき、1.(a) で示した式を解いて恒星中心からの距離 r の点における密度 ρ を求めよ。また密度 ρ のスケールハイト H も示せ。スケールハイトは $1/H = -(1/\rho)(d\rho/dr)$ で定義される量である。$r = A$ における密度は ρ_A とする。

(c) 恒星は輝いているので、大気を構成する粒子は動径方向外向きに放射圧を受ける。粒子一個あたりに働く放射圧の力は SF/c で表すことでき、S は粒子の有効断面積であり定数、c は真空中の光速である。F は放射のエネルギーフラックスであり、L を恒星中心からの距離 r の球の表面積で割った $F = L/(4\pi r^2)$ である。1.(a) で求めた式に放射圧の効果を追加し、このときの密度 ρ のスケールハイト H_{mod} を求めよ。アボガドロ定数は N_{A} とする。

(d) 恒星の光度が大きくなると、恒星の重力と放射圧の効果が釣り合い、密度の距離依存性がなくなることが考えられる。密度 ρ が距離 r に関係なく一定となる恒星の光度 L_{E} を示せ。

(e) 太陽における L_{E} を有効数字一桁で求め、実際の太陽の光度 ($L_\odot = 4 \times 10^{26}\ \mathrm{J\,s^{-1}}$) と比較して、太陽大気における放射圧と重力を比べた時の比を示せ。ここで太陽質量は $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg、大気を構成する粒子の単位質量あたりの有効断面積は $SN_{\mathrm{A}}/\tilde{\mu} = 0.04\ \mathrm{m^2\,kg^{-1}}$、万有引力定数は $G = 7 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$、真空中の光速は $c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ とする。

2. (a) 単位質量あたりのエンタルピー I は、$I = U + (P/\rho)$ で示される量である。ここで U は、単位質量あたりの内部エネルギーを示す。理想気体の単位質量あたりのエンタルピーは、比熱比 $\gamma = c_\mathrm{P}/c_\mathrm{V}$ を使って $I = [\gamma/(\gamma-1)](1/\tilde{\mu})\mathcal{R}T$ となることを示せ。ここで c_V と c_P は、理想気体の定積モル比熱と定圧モル比熱であり、これらの値は温度に依存しないとする。

(b) 実際の恒星大気は等温ではなく、星間空間に向かって大気が定常的に流れ出している（星風）。放射圧を無視できる場合、恒星から離れれば星風は断熱的になり、保存力である重力に束縛されているため、下の式に示すように、単位質量あたりの運動エネルギーと単位質量あたりのエンタルピー I と保存力のポテンシャル Ω の和が流線に沿って一定となる（圧縮性流体の定常流に対するベルヌーイの定理)。

$$\frac{1}{2}v^2 + I + \Omega = (\text{一定})$$

ここで、v は大気の流速である。このベルヌーイの定理を使い、星風が吹く（$v > 0$）ために必要な恒星表面近く（$r \sim A$）の大気温度 $T(A)$ の条件を示せ。なお、恒星表面近くは星風がまだ発達していないため、速度 $v(A)$ は 0 と考えてよい。