総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻五年一貫制博士課程
Graduate University for Advanced Studies, SOKENDAI
Department of Astronomical Science
5-year doctoral program

2022 年度 4 月入学者選抜試験
The entrance examination for April admission (FY 2022)

筆記試験（専門科目①）問題
Written examination (Specialized subjects)

2021 年 8 月 25 日
August 25, 2021

以下の全ての問いに解答せよ。
Answer all the following questions.

解答は解答用紙に記入すること。
Answers must be placed in the answer sheets.

解答用紙とともに下書用紙も回収するので、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。
All draft and answer sheets are to be collected at the end of exam.
Do not forget to provide your application number at the top of all draft and answer sheets.

$\boxed{\text{第１問}}$

実数 r、z の実関数 $f(r,z)$ が次の偏微分方程式を満たすとする。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0 \tag{1.1}$$

ここで、$r \geq 0$ とし、関数 $f(r,z)$ は恒等的にはゼロでないとする。以下の設問に答えよ。

1. 式 (1.1) の偏微分方程式を変数分離法によって解くことを考える。そこで、

$$f(r,z)=G(r)H(z) \tag{1.2}$$

とおき、式 (1.2) を式 (1.1) に代入し変数分離を行うことによって、関数 $H(z)$ についての常微分方程式が、任意の定数 k を用いて次のように得られたとする。

$$\frac{d^2H(z)}{dz^2}-k^2H(z)=0 \tag{1.3}$$

このとき、関数 $G(r)$ についての常微分方程式を求めよ。

2. 式 (1.3) で与えられた $H(z)$ についての微分方程式を考える。以下の問いに答えよ。

(1) k が実数の場合に、この微分方程式を解き、一般解を求めよ。

(2) 次に、ここでは k を正の実数として、$z \neq 0$ のときに式 (1.3) を満たす恒等的にはゼロでない関数 $H(z)$ を考える。また、$H(z)$ は、$z \to \pm\infty$ のときに $H(z) \to 0$ を満たすとする。さらに、$H(z)$ は z の正負で対称とし、かつ $z=0$ で連続とする。以下の①～③の問いに答えよ。
① これらの条件を満たす $H(z)$ を式で表せ。
② このとき、$H(z)$ の１階微分は $z=0$ で連続かどうかを述べよ。
③ $H(z)$ の概略を図示せよ。

3. 以下の級数で定義された実関数 $J_n(u)$ を考える。

$$J_n(u) \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{\ell!(n+\ell)!}\left(\frac{1}{2}u\right)^{n+2\ell} \tag{1.4}$$

ここで、u は実数で $u \geq 0$ とする。また、n と ℓ は非負の整数である。このとき、次式を考える。

$$\frac{1}{u}\frac{d}{du}\left(u\frac{dJ_n(u)}{du}\right) \tag{1.5}$$

この式 (1.5) に式 (1.4) を代入することによって、式 (1.5) で与えられた項を式 (1.4) と同様な級数の形で求めよ。

4. 式 (1.4) で定義された関数 $J_n(u)$ が次の微分方程式を満たすことを、設問 3 の結果を用いて示せ。

$$\frac{1}{u}\frac{d}{du}\left(u\frac{dJ_n(u)}{du}\right)+\left(1-\frac{n^2}{u^2}\right)J_n(u)=0 \tag{1.6}$$

5. 式 (1.6) において $u=ar$（ここで a は正の実定数とする）と置き換えることにより、式 (1.6) を、r のみを変数として書き直せ。また、この結果を用いて、設問 1 で求めた $G(r)$ についての微分方程式（ここでは k は正の実数とする）を満たす解の 1 つとして、$G(r)$ を、式 (1.4) で定義された関数を用いて表せ。

第 2 問

以下の設問に答えよ。

1. 図 1 にある流体の様子を示す。実線は流れを表し、この流れの各点での速度ベクトル（灰色矢印）を滑らかにつなげた曲線を流線と呼ぶ。流れの速度が時間変化をしない場合は定常流と呼ばれ、流線と流れの道筋とは一致する。単純化のために、流体の運動に渦はないとし、かつ流体は非圧縮性（つまり密度は一定）の完全流体（非粘性流体）とする。このとき、ある任意の流線に沿って

$$p + \frac{\rho q^2}{2} + \rho g z = C \tag{2.1}$$

が成り立つ。ここで、p、ρ、q はそれぞれ流体の圧力、密度、速度で、g、z は重力加速度と基準点からの高さである。重力加速度は鉛直方向下向き（z 軸の負の方向）に一様にかかっているとする。C は定数である。この式は非圧縮性完全流体のエネルギー保存則を表し、ベルヌーイの定理として知られている。これを用いて以下の問いに答えよ。

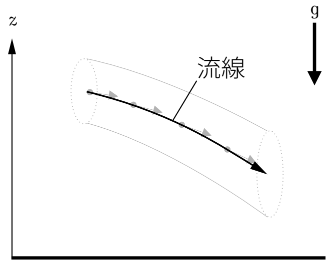

図 1

(1) 図 2 の容器の中に水が入っている。水面の高さを容器の底から測って z と表す。底には断面積が小さな穴があり、そこから排水されている。ベルヌーイの定理を用いると、この排水速度 q が

$$q = \sqrt{2gz} \tag{2.2}$$

と書けることを示せ。ここで、容器底の穴の断面積は容器全体の水平断面積に比べて十分に小さく、水面の高さの変化はゆっくりであるとし、また水面の速度は 2 乗以上の項を無視して良い。さらに、容器の上と下の大気圧差はないと考えて良い。[ヒント：式 (2.1) を水面と容器底の穴において適用せよ。]

なお、式 (2.2) で表されるように、排水速度は水面の高さのみの関数となる。これはトリチェリーの定理として知られている。

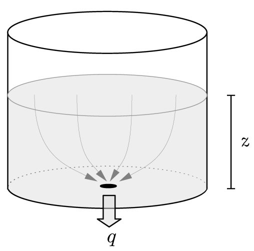

図 2

(2) 図 3 のように、円柱座標系において $z = ar^n$ という曲線を z 軸まわりに回転させた形状の容器を考える。ここで a と n はそれぞれ定数である。容器には z 軸に沿って等間隔に印がついてお

り、それぞれに等間隔の数値が書かれている。この容器に水をため、底に小さな穴（必要であれば断面積を A とせよ）を開けてゆっくりと排水し、水面の高さを水時計として利用したい。式 (2.2) が適用できると考え、n を求めよ。

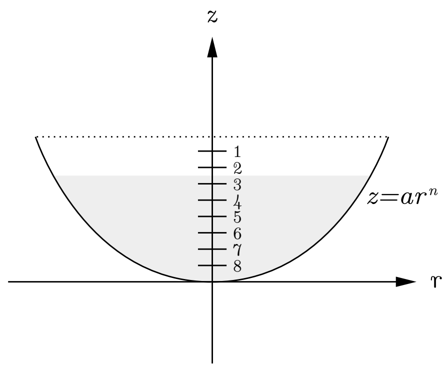

図 3

2. 次に、同じ重力場におけるより一般的な運動として、オイラーの運動方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} + gz\right) + \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) \tag{2.3}$$

で表せる非圧縮性完全流体を考える。ここで、$\boldsymbol{v}$、p、ρ はそれぞれ流体の速度ベクトル、圧力、密度を表し、$q = |\boldsymbol{v}|$ である。設問 1 同様、重力加速度は鉛直方向下向き（z 軸の負の方向）に大きさ g で一様にかかっているとし、z は基準点からの高さである。以下の問いに答えよ。

(1) 式 (2.3) において渦なしの定常流を仮定することで、式 (2.1) が成り立つことを示せ。ここで、渦なしとは $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$ を意味する。

(2) 図 4 のように、円筒容器内で一定の角速度 ω で容器とともに剛体回転する流体を考える。流体は定常状態にあると考えてよい。z 軸を回転中心にとり、半径方向を r、角度方向を ϕ で表す円柱座標系 (r, ϕ, z) をとり、容器の底に z 軸の原点をとる。このとき、ある半径 r における速度ベクトルは $\boldsymbol{v} = (0, r\omega, 0)$ と表せる。式 (2.3) を r 方向、ϕ 方向、z 方向それぞれについて書け。必要に応じて次のベクトル公式を用いてよい。

円柱座標系のそれぞれの単位方向ベクトルを $\boldsymbol{e_r}$、$\boldsymbol{e_\phi}$、$\boldsymbol{e_z}$ として

$$\nabla = \boldsymbol{e_r}\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e_\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + \boldsymbol{e_z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.4}$$

と書ける。また、$\boldsymbol{v} = (v_r, v_\phi, v_z)$ のとき

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e_\phi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r v_\phi}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{e_z} \tag{2.5}$$

である。

(3) 設問 2(2) で導いた各方向についての式を用いて、流体の圧力 p を、r と z の関数として表せ。ここで、z 軸上での水面の高さを z_0 とし、その点での圧力を p_0 とせよ。

(4) 設問 2(3) で導いた圧力 p の関数を用い、水面では圧力が一定（p_0）として水面の形状 $z = f(r)$ を求めよ。

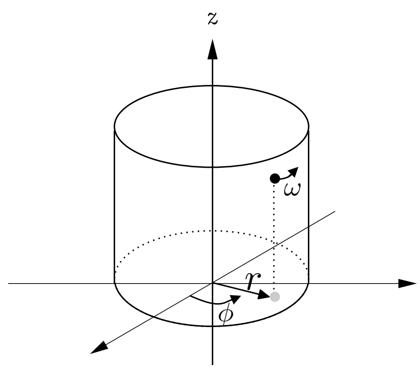

図 4

総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻五年一貫制博士課程
Graduate University for Advanced Studies, SOKENDAI
Department of Astronomical Science
5-year doctoral program

2022 年度 4 月入学者選抜試験
The entrance examination for April admission (FY 2022)

筆記試験（専門科目②）問題
Written examination (Specialized subjects 2)

2021 年 8 月 25 日
August 25, 2021

以下の全ての問いに解答せよ。
Answer all the following questions.

解答は解答用紙に記入すること。
Answers must be placed in the answer sheets.

解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。
All draft and answer sheets are to be collected at the end of exam.　Do not forget to provide your application number at the top of all draft and answer sheets as well as the cover sheet.

$\boxed{\text{第3問}}$

半径1の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ を考える。x、y、z 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ と、極座標表示における θ、ϕ を図1のように定める。法線ベクトルの正の向きは球面の外向きとする。以下の設問に答えよ。

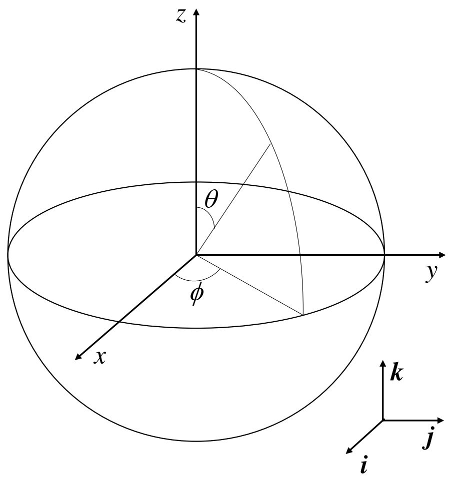

図1

1. この球面の $x \geq 0$、$y \geq 0$ の部分 F_1 を考える。

   (1) 位置 (θ, ϕ) における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を θ、ϕ を用いて表せ。

   (2) F_1 に対して、面積分 $\iint_{F_1} x dS$ を求めよ。dS は球面上の微小面積要素を表す。

   (3) F_1 に対して、以下を求めよ。$\times$ はベクトル積を表す。また、$d\boldsymbol{S}$ は球面上の微小面積要素のベクトルであり、向きは面の法線方向で、大きさは dS である。

$$\iint_{F_1} (z\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \times d\boldsymbol{S}$$

2. この球面の $z \geq 0$ の部分 F_2 を考える。ベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= x(x-2z)\boldsymbol{i} + y(y-2x)\boldsymbol{j} + z(z-2y)\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{B} &= y^2 z\boldsymbol{i} + z^2 x\boldsymbol{j} + x^2 y\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

   とする。

   (1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めよ。

   (2) $\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{B}$ であることを示せ。

   (3) 以下を求めよ。

$$\iint_{F_2} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

3. この球面と平面 $x+z=1$ の交線がつくる円 C を考える。

(1) 円 C の xy 平面上への正射影を方程式で表せ。

(2) 円 C の面積を求めよ。

(3) x 軸上から出発し、円 C 上を $y>0$ の部分、$y<0$ の部分の順に経て一周するとして、以下の線積分を求めよ。

$$\int_C y dx + z dy + x dz$$

第 4 問

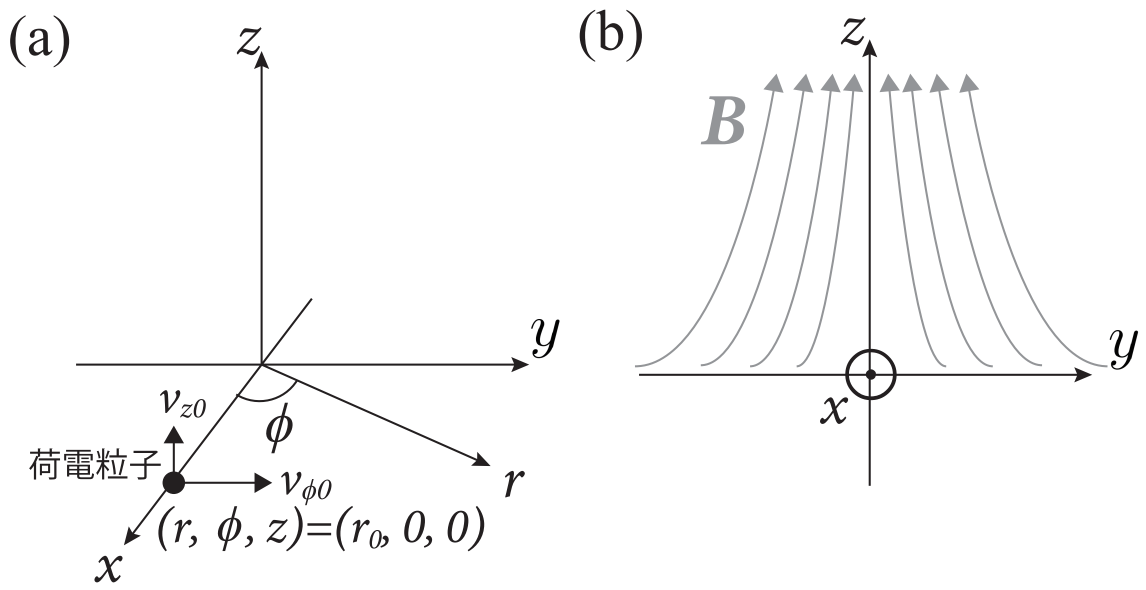

図 1

空間的にゆるやかに変化する磁場の下で、電荷 $-q$（ただし、$q > 0$）、質量 m を持つ荷電粒子の運動を考える。図 1(a) のように、荷電粒子は初期に円柱座標系において $(r, \phi, z) = (r_0, 0, 0)$ の位置に投入され、初期速度ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_r, v_\phi, v_z) = (0, v_{\phi 0}, v_{z0})$ を持つ。図 1(b) は図 1(a) の yz 平面を表し、磁場は z 軸まわりに対称で、時間に依らない。磁場ベクトル $\boldsymbol{B}$ は、$\boldsymbol{B} = (B_r, B_\phi, B_z) = (B_r, 0, B_0 + B_0' z)$ で与えられ、B_0、B_0' は共に正の定数である。電場はゼロとし、重力の影響は無視する。ここで、$v_{\phi 0} \gg v_{z0} > 0$ であるとする。また、荷電粒子の z 軸方向の速度は十分遅く、荷電粒子が z 軸を中心に一周する間、その運動は常に z 軸に垂直な円運動で表すことができるとして、以下の設問に答えよ。

1. マクスウェル方程式 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ から、B_r を B_0' と r を用いて表せ。ただし、$r = 0$ において $B_r = 0$ である。円柱座標系における以下の関係を用いても良い。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{4.1}$$

2. 荷電粒子に加わるローレンツ力の r 成分と遠心力のつり合いから、円運動の半径 r が $r = mv_\phi/(qB_z)$ で表されることを示せ。

3. ϕ 方向の運動方程式から、dv_ϕ/dz を B_z、B_0'、v_ϕ を用いて表せ。

4. 設問 3 で得た式を用いて $z = 0$ から $z = z_m$ までの積分を考えることで、z_m における v_ϕ と B_z をそれぞれ v_{ϕ,z_m}、B_{z,z_m} として $v_{\phi,z_m}/v_{\phi 0} = \sqrt{B_{z,z_m}/B_0}$ の関係式が得られること、さらにこの関係式から磁気モーメント $\mu = mv_\phi^2/(2B_z)$ が保存することを示せ。

5. 荷電粒子に加わるローレンツ力の z 成分と、設問 1 で求めた関係から、z 軸方向に加わる力が、B_z の z 方向の勾配（dB_z/dz）と磁気モーメントに依存することを示せ。

6. 設問 5 で得た z 軸方向に加わる力の式から、荷電粒子が $+z$ 方向に進むにつれて v_z が小さくなることがわかる。ある距離 $z=z_c$ まで到達すると $v_z=0$ となり、その後、$-z$ 方向に向かって運動することになる。これは磁気ミラー現象として知られている。エネルギー保存則から、z_c を B_0、 B_0'、v_{z0}、$v_{\phi 0}$ を用いて表せ。

第 5 問

物体はあらゆる振動数 ν（または波長 λ）の電磁波を放射する。「黒体放射」と呼ばれる理想的な放射では、物体の放射強度は、その物体の表面温度 T に依存する振動数の関数として与えることができる。ここでは、黒体放射を統計力学的に考察する。そのために、電磁波を調和振動子として扱うこととする。いま、振動子が n 個ある状態のエネルギー $\varepsilon_{n,\nu}$ は、プランク定数を h で表し、簡単化のため零点振動 $h\nu/2$ を無視すると、

$$\varepsilon_{n,\nu} = nh\nu \tag{5.1}$$

で与えられる。なお、以下では、表記の簡略化のため、ボルツマン定数 k_{B} を使わずに、基本温度 τ ($\equiv k_{\mathrm{B}}T$) を用いる。以下の設問に答えよ。

1. 振動子が n 個ある状態をとりうる確率 $P(\varepsilon_{n,\nu})$ は、関数 $Z(\nu,\tau)$ を用いて

$$P(\varepsilon_{n,\nu}) = \frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{\varepsilon_{n,\nu}}{\tau}\right) \tag{5.2}$$

と与えられる。 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $Z(\nu,\tau)$ を等比級数の形で示せ。

(2) 関数 $Z(\nu,\tau)$ が次式で表せることを示せ。

$$Z(\nu,\tau) = \frac{1}{1-e^{-h\nu/\tau}} \tag{5.3}$$

(3) 系のエネルギーの期待値（内部エネルギー）U は、τ と Z を用いて

$$U = f(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\ln Z \tag{5.4}$$

と表すことができる。この関係を式 (5.2) を用いて導き、$f(\tau)$ を求めよ。

2. n の期待値（占有数）を $\langle n\rangle$、微小振動数幅 $\mathrm{d}\nu$ に含まれる状態の数を $g(\nu)\mathrm{d}\nu$ とすると、単位体積・単位振動数あたりのエネルギー密度 $u(\nu)$ は

$$u(\nu) = h\nu\cdot\langle n\rangle\cdot g(\nu) \tag{5.5}$$

である。いま、占有数は

$$\langle n\rangle = \frac{1}{e^{h\nu/\tau}-1} \tag{5.6}$$

と導くことができる。必要であれば光の速さは c として、以下の問いに答えよ。

(1) 1 辺の長さが L の仮想的な立方体の箱を考え、その中で波数 k の平面波が定在波をなしているとき、k と L の間にどのような関係が成り立つ必要があるかを示せ。ただし、波数 k は波長 λ と $k = 2\pi/\lambda$ の関係にある。

(2) 設問 2(1) の状況において、波数 k に対応する振動数 ν_k よりも小さい振動数空間に含まれる状態の数を求め、その微分から $g(\nu)\mathrm{d}\nu$ を求めよ。ここで、$L \gg \lambda$ とする。なお、偏光は 2 方向にあることに留意せよ。

(3) 以上から、エネルギー密度として

$$u(\nu) = \frac{A\nu^B}{e^{h\nu/\tau}-1} \tag{5.7}$$

を得る。定数 A と B を導け。

3. 二つの天体 p と s はそれぞれ半径 1.0×10^5 **km**（$\equiv R_{\mathrm{p}}$）と 1.0×10^4 **km**（$\equiv R_{\mathrm{s}}$）の球体であり、それぞれ波長 $0.1\ \mu$m（$\equiv \lambda_{\mathrm{m,p}}$）と $1.0\ \mu$m（$\equiv \lambda_{\mathrm{m,s}}$）で強度の最大値を取る黒体放射をしている。両天体が空間的に十分に離れている場合に比べて、観測者の視線上で天体 p の後ろに天体 s が完全に隠れている場合に、観測される放射強度がどの程度低下するか（減光率）を知りたい。ただし、天体 s からの放射は 天体 p に完全に遮蔽されるとする。また、天体 p と s は観測者から十分遠方に位置するため、観測者からの距離は 2 天体とも同じであると考えて計算して良い。以下の問いに答えよ。

(1) 式 (5.7) を用いて、エネルギー密度を振動数 ν ではなく、波長 λ の関数として表せ。ただし、式 (5.7) の A と B を用いて解答して良い。

(2) よく知られているように、黒体放射強度が最大値を取る波長（λ_{m}）は物体の基本温度（τ）に反比例する。すなわち、定数 α を用いて、$\lambda_{\mathrm{m}} = \alpha/\tau$ と表せる。ただし、α は hc と同程度の大きさの値を取る。この法則と設問 3(1) で得た式を用いて、波長 λ_0 で観測したときの減光率を計算し、有効数字 1 桁で答えよ。ここでは、λ_0 は $\lambda_{\mathrm{m,p}}$ と $\lambda_{\mathrm{m,s}}$ に比べて十分に長く、計算において、$\lambda_{\mathrm{m,p}}/\lambda_0, \lambda_{\mathrm{m,s}}/\lambda_0$ の 2 次以降は無視して良い。