総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻五年一貫制博士課程
Graduate University for Advanced Studies, SOKENDAI
Department of Astronomical Science
5-year doctoral program

2021年度4月入学者選抜試験
The entrance examination for April admission (FY 2021)

筆記試験（専門科目①）問題
Written examination (Specialized subjects I)

2020年8月26日
August 26, 2020

以下の全ての問いに解答せよ。
Answer all the following questions.

開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。
Do not open this booklet until there are instructions to do so.

解答は解答用紙に記入すること。
Answers must be placed in the answer sheets.

解答用紙とともに下書用紙も回収する。解答の表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙と下書用紙に受験番号を記入せよ。
All answer sheets and the draft are to be collected at the end of exam.　Do not forget to provide your application number at the top of all draft and answer sheets.

$\boxed{\text{第 1 問}}$

以下の設問に答えよ。ただし、変数 x、y は実数とする。また、積分定数を使う場合は明示せよ。

1. 次の微分方程式を解け。ただし、e を自然対数の底とする。

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}(2x-4)$$

2. 次の微分方程式を解け。ただし、ω、Ω、F は正の実定数であり、$\omega \neq \Omega$ である。

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = F\cos(\Omega x)$

3. 次の微分方程式を解け。

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + 4x^{-1}y^{-1} = x^3$$

第2問

1. 一般座標 q とその時間微分 $\dot{q}$ を用いて自由度 1 の質点のラグランジアン L を

$$L = L(q,\ \dot{q},\ t) \tag{2.1}$$

と書き、時刻 $t = t_1$ に位置 P_1 を出発し、時刻 $t = t_2$ に位置 P_2 に到着する運動を考える。作用積分 S を

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{2.2}$$

と定義すると、最小作用の原理 (変分原理) より、この質点は作用積分 S が極値を取るように運動する。つまり、実際に起こる運動からわずかにずれた運動 ($q + \delta q$ と $\dot{q} + \delta\dot{q}$) を考えた場合、その作用積分はどのような δq と $\delta\dot{q}$ に対しても変化しない。すなわち、

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \tag{2.3}$$

となる。このことを用いて、オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \tag{2.4}$$

を導出せよ。ただし、運動の最初と最後である P_1 と P_2 は固定されていて、$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ とする。また、δq と $\delta\dot{q}$ は十分に小さく、2 次以上の項を無視して良い。

2. 座標の平行移動 $q \to q + \Delta q$ に対してラグランジアンが不変の時

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{2.5}$$

が保存される。これは式 (2.4) において、左辺第一項がゼロとなることから理解できる。これは運動量保存則に対応する。一方、ラグランジアンが時間の並進 $t \to t + \Delta t$ に対して不変の時、エネルギー

$$E = p\dot{q} - L \tag{2.6}$$

が保存されることを示せ。[ヒント：L を全微分せよ]

3. 図 2.1 のように円柱座標系において $z = f(r)$ で表される形で固定されたワイヤー (太さは無視できる) に沿って、質量 m を持った質点 A がなめらかに動く。$f(0) = 0$ とし、ワイヤーは連続的で $f(r)$ は微分可能である。このワイヤーは z 軸の周りに一定の角速度 ω で回転している。重力加速度は z 軸の負の方向に g である。

(1) この系のラグランジアン L を m、g、ω、r、$\dot{r}$、f、$f'(=\frac{df}{dr})$ を使って書き下せ。なお、運動エネルギーを K、位置エネルギーを U とすると、ラグランジアンは $L = K - U$ で定義される。

(2) L を式 (2.4) に代入することで、質点が r によらずワイヤー上を動かない場合 (つまり $\dot{r} = 0$) の $f(r)$ を g、ω、r を用いて表わせ。

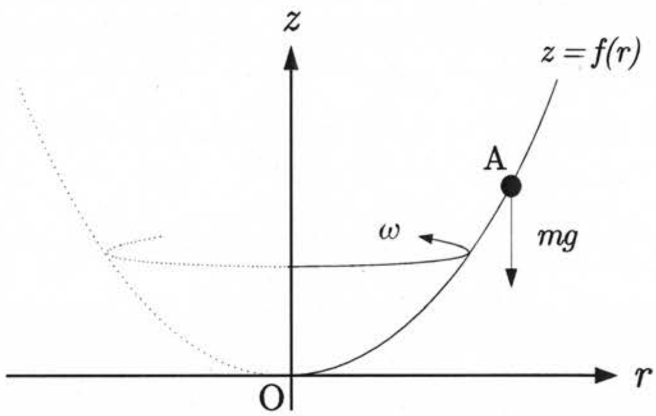

図 2.1

総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻五年一貫制博士課程
Graduate University for Advanced Studies, SOKENDAI
Department of Astronomical Science
5-year doctoral program

2021 年度 4 月入学者選抜試験
The entrance examination for April admission (FY 2021)

筆記試験（専門科目②）問題
Written examination (Specialized subjects II)

2020 年 8 月 26 日
August 26, 2020

以下の全ての問いに解答せよ。
Answer all the following questions.

開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。
Do not open this booklet until there are instructions to do so.

解答は解答用紙に記入すること。
Answers must be placed in the answer sheets.

解答用紙とともに下書用紙も回収する。解答の表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙と下書用紙に受験番号を記入せよ。
All answer sheets and the draft are to be collected at the end of exam. Do not forget to provide your application number at the top of all draft and answer sheets.

第3問

以下の設問に答えよ。ただし、変数 x を実数、m、n を正の整数とする。e は自然対数の底である。関数列や広義積分の収束性は論じなくてもよい。

1. 実関数 $f(x)$ を以下のように $-\pi \leq x \leq \pi$ の区間でフーリエ級数展開する。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} \tag{3.1}$$

ただし、$f(x)$ は $-\pi \leq x \leq \pi$ の区間で連続とする。

(1) フーリエ級数の係数 a_0 、a_n 、b_n を求めよ。ただし、以下を用いてよい。

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \delta_{mn} \tag{3.2a}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \delta_{mn} \tag{3.2b}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0 \tag{3.2c}$$

ここで δ_{mn} はクロネッカーのデルタで、$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 \ (m = n) \\ 0 \ (m \neq n) \end{cases}$ である。

(2) $f(x)$ が

$$f(x) = 2x^2 - \pi^2 \tag{3.3}$$

のとき、フーリエ級数の係数 a_0 、a_n 、b_n を n を用いて表せ。

2. (1) $x > 0$ のとき、以下が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \tag{3.4}$$

(2) 式 (3.4) を用いて、以下が成り立つことを示せ。

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{3.5}$$

(3) 設問 1 (2) の結果を用いて、式 (3.5) の積分を級数を用いずに表せ。

第4問

空間的に一様で時間に依らない外部磁場がある状況で、物質と電磁波の相互作用について考える。図 4.1(a) に示すように、磁束密度 $\boldsymbol{B_0} = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, B_0)$ の外部一様磁場が z 方向に作用し、電場ベクトル $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E_0} \exp\{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\}$ で与えられる電磁波が伝搬する状況を考える。ここで、i は虚数単位、$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル、$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトル、ω は角振動数、t は時間を表す。以下の設問 1、2 に答えよ。

1. 図 4.1(a) のように、真空中を伝搬する電磁波と電子の相互作用を考える。電子は電荷 q、質量 m を持つ。この電子の運動方程式は、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{B_0}\right)$$

で表されるとする。$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0}$ にある電子が、電磁波との相互作用の結果、$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \Delta\boldsymbol{r}$ のように変位し、変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{r}$ は $\Delta\boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{r}_0 e^{-i\omega t}$ のように振る舞う。この場合に、$\Delta\boldsymbol{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ は、$\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ を用いて、以下の式で書くことができる。

$$\begin{aligned}\Delta x &= -\alpha E_x - \beta E_y \\ \Delta y &= \beta E_x - \alpha E_y \\ \Delta z &= -\gamma E_z\end{aligned}$$

α、β、γ の表現として適切なものを、それぞれ、以下の (i) から (vi) の選択肢の中から選べ。ただし、電荷 q に対するサイクロトロン周波数を $\omega_c = qB_0/m$ とする。また、$\omega \neq \omega_c$ の状況を考える。

(i) $\dfrac{iq\omega_c}{m\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}$　(ii) $\dfrac{iq}{m\omega_c^2}$　(iii) $\dfrac{q}{m\omega^2}$　(iv) $\dfrac{-q}{m(\omega^2 - \omega_c^2)}$

(v) $\dfrac{q}{m(\omega^2 - \omega_c^2)}$　(vi) $\dfrac{-iq}{m\omega^2}$

2. 設問 1 の状況をより一般化し、図 4.1(b) で示すように、$z > 0$、x 方向、y 方向に $-\infty$ から ∞ の領域に一様に満たされた誘電体と、z 軸に平行に $-\infty$ から ∞ の方向に伝搬する電磁波との相互作用を考える。電磁波の電場によって、誘電体を構成する原子が分極を起こす様子を、図 4.2 に示す。原子核は電子よりもはるかに重く、分極の際の相対変位は、電子が担うとしてよい。分極によって生じる電気双極子電荷を $\pm q$、電気双極子の相対変位ベクトルを $\boldsymbol{d}$ とすると、分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ は、$\boldsymbol{P} = nq\boldsymbol{d}$ と表すことができる。ここで、n は電気双極子の密度である。また、この分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ は、電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ に比例し、$\boldsymbol{P} = \epsilon_0 \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{E}$ のように書ける。ここで、ϵ_0 は真空中の誘電率、$\boldsymbol{\chi}$ は電気感受率テンソルで

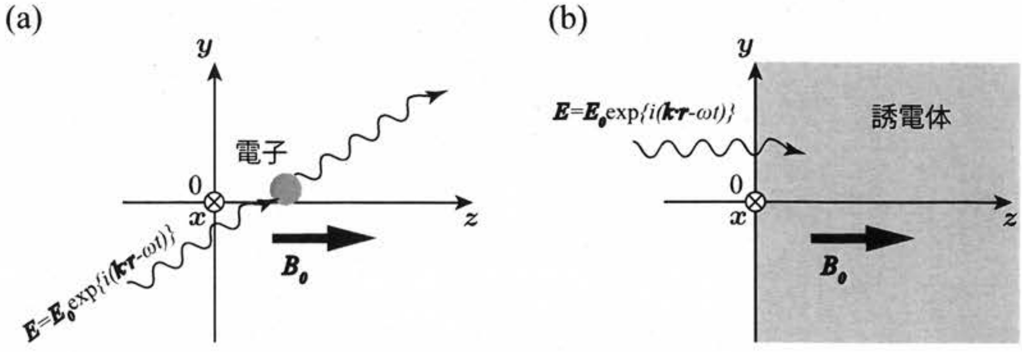

図 4.1

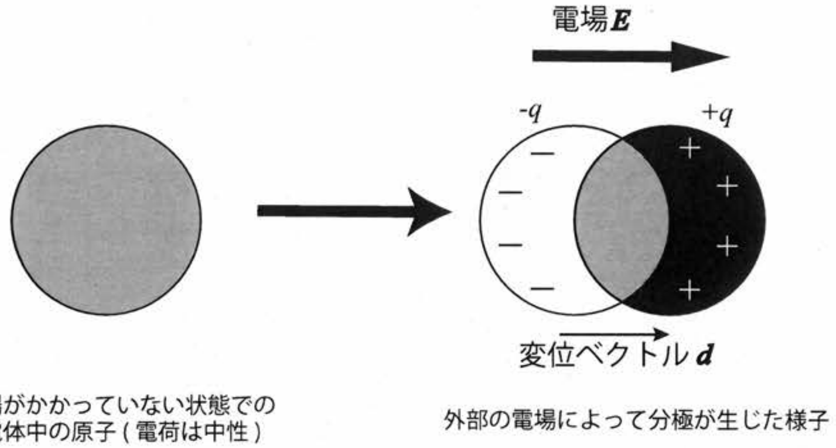

図 4.2

ある。一方、誘電体中の電束密度ベクトル $\boldsymbol{D}$ と電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ との間には、$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{E} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ が成立する。ここで、$\boldsymbol{\epsilon}$ は比誘電率テンソルで、その成分 ϵ_{ij} と電気感受率テンソルの成分 χ_{ij} には、$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \chi_{ij}$ (添え字 i、j は、x、y、または z を表す) の関係がある。ここで、δ_{ij} はクロネッカーのデルタで $i = j$ のときに 1、$i \neq j$ のときに 0 となる。

(1) 設問 1 で設定した電子を、分極電荷におきかえて考える。そのとき、変位や分極と電場の関係についても、設問 1 で求めた関係から導くことができる。(ただし、電磁波は $+z$ 方向に進むと考え、さらに $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{d}$ と変更した場合。) この点を考慮して、比誘電率テンソル $\boldsymbol{\epsilon}$ を、α、β、γ、ϵ_0、n、q を用いて書け。

(2) 磁場を含む誘電体中を伝わる波は、左右円偏光間で位相速度が異なる (円偏光とは、E_x と E_y の位相差が $\pm\pi/2$ の電磁波、すなわち $E_x = \pm i E_y$)。そのため、直線偏光の波が誘電体中を通過すると、偏光角の回転 (ファラデー回転) が起こる。誘電体中では伝導電流がないと考えると、マクスウェル方程式のうち、電磁誘導の式とアンペールの式は、それぞれ、

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

のように表せる。ここで $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ で、$\boldsymbol{H}$ は磁場ベクトル、μ_0 は透磁率で、簡単のため真空中のものと等しいとする。また、$c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$ としてよい (c は真空中の光速)。上記のマクスウェル方程式より、$\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{E}$、ω、c、$\boldsymbol{\epsilon}$ が満たすべき関係式を示せ。ベクトル解析の公式、$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$ の関係を用いてもよい。

(3) 設問 2(2) で求めた関係式が、自明解 ($E_x = E_y = E_z = 0$) 以外の解をもつための条件を求めることにより、波の分散関係、すなわち $\boldsymbol{k}$ と ω の関係を表せ。ここで、設問 2(1) で求めた比誘電率テンソルを用いよ。また、求められた分散関係と設問 2(2) で求めた関係式より、E_x と E_y が満たすべき関係式を導き、左右の円偏光間で位相速度が異なることを示せ。

第5問

以下の設問に答えよ。

1. 電子回路のある点の電位をオシロスコープで測定したところ、正弦波の信号が観測された。以下の問いに答えよ。

(1) 図5.1は観測された信号波形である。縦軸は1目盛りが0.2V、横軸は1目盛りが50μsである。信号の振幅(V)、周波数(kHz)、周期(μs)として最も近いものを次の(い)〜(ほ)のうちから一つ選べ。

	振幅 (V)	周波数 (kHz)	周期 (μs)
(い)	0.5	40	250
(ろ)	0.8	4	250
(は)	500	40	500
(に)	0.5	4	250
(ほ)	0.5	2	500

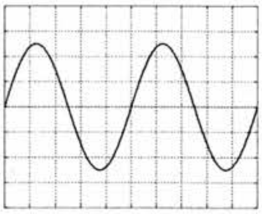

図5.1

(2) 図5.2(a)および(b)に示す、高い周波数の信号を減衰するための回路を考える。抵抗の値をR、コンデンサの静電容量をC、コイルのインダクタンスをLとし、電流の角周波数をω ($\omega > 0$)としたとき、インピーダンスはそれぞれ、R、$1/(i\omega C)$、$i\omega L$である。ここでiは虚数単位である。周波数をfとすると、$\omega = 2\pi f$の関係がある。各回路の入力電圧をV_{IN}、出力電圧をV_{OUT}としたとき、その比の大きさ$|V_{\mathrm{OUT}}/V_{\mathrm{IN}}|$が$1/\sqrt{2}$となる周波数を遮断周波数と呼ぶ。(a)、(b)の回路の遮断周波数をそれぞれ、f_{LR}とf_{CR}としたとき、f_{LR}およびf_{CR}をL、C、Rを使って表せ。

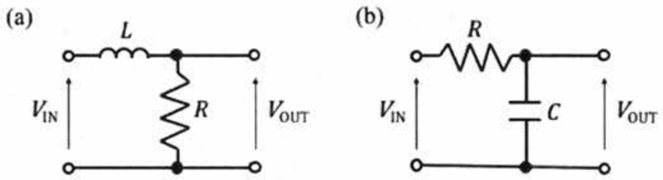

図5.2

(3) 図5.3の電気回路において、抵抗の値をR_1、R_2、コンデンサの静電容量をC_1、C_2とする。正弦波交流電圧源の電圧をV_1、R_2にかかる電圧をV_2としたとき、電圧比V_2/V_1が周波数にかかわらず一定であるためにR_1、R_2、C_1、C_2が満たすべき条件を求めよ。

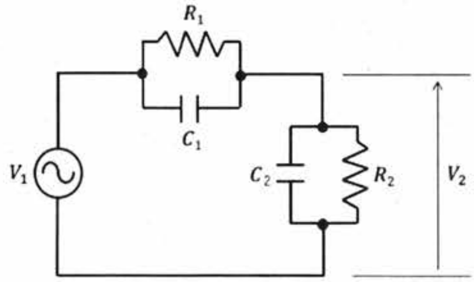

図5.3

2. 電波望遠鏡などに使われる増幅器は入力信号を増幅して出力するものであるが、その出力には増幅器を起源とする雑音も加わる。図 5.4 に示すように、周波数帯域幅（信号を測定する周波数範囲）を B、増幅器の倍率を G、増幅器の出力に加わる雑音電力を N_a とし、増幅器の入力に抵抗を接続した場合を考える。抵抗では内部の自由電子の熱的擾乱によって起電力が発生し、この周波数帯域幅において電力 kT_SB が生じる。ここで、k はボルツマン定数、T_S は抵抗の絶対温度である。抵抗で発生した電力はすべて増幅器に入力されるものとすると、増幅器の出力電力は $kT_SBG + N_a$ となる。N_a を増幅器の入力に換算した電力と同じ大きさの電力を抵抗で生じさせるのに必要な温度として $T_e = N_a/kBG$ を定義し、T_e を増幅器の雑音温度と呼ぶことにする。このとき、以下の問いに答えよ。

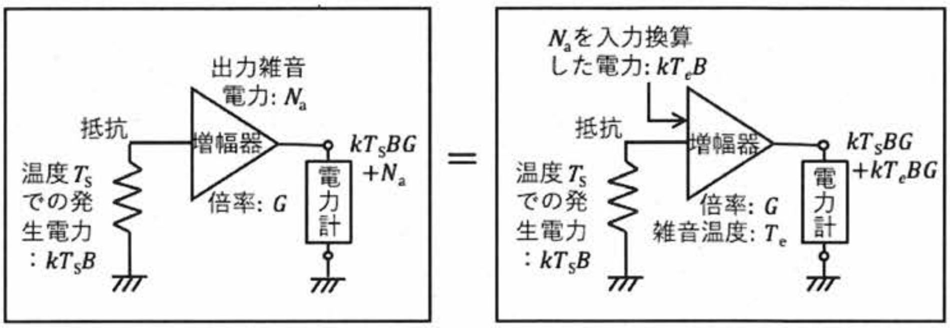

図 5.4

(1) 図 5.5 は増幅器を 2 段接続したものである。増幅器 1、増幅器 2 の倍率、雑音温度をそれぞれ、G_1、T_1、G_2、T_2 としたとき、2 段接続した増幅器全体の雑音温度 T_T を求めよ。ただし、増幅器 1 の出力電力は、すべて増幅器 2 に入力されるものとする。

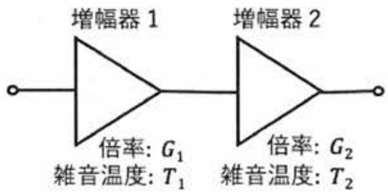

図 5.5

(2) 図 5.6 は、ある観測システムの入力に抵抗を接続したものである。このシステムの雑音温度 T_{SYS} を測定により求める。まず、入力抵抗の温度を T_H に設定したところ、システムの出力電力は P_H となった。同様に温度を T_C（$T_C < T_H$）とした場合の出力電力は P_C であった。その出力電力比（P_H/P_C）を Y としたとき、T_{SYS} を T_C、T_H、Y を用いて表せ。ただし、抵抗で発生した電力は、すべてシステムに入力されるものとする。

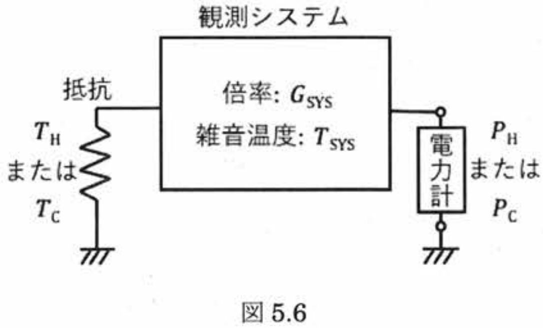

図 5.6

専門試験２問題文訂正

- 第４問の設問２(1)

【誤】α、β、γ、ε_0、n、qを用いて書け

【正】α、β、ε_0、n、qを用いて書け