総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻

五年一貫制博士課程
平成 27 年度 4 月入学に係る筆記試験（専門科目）問題

（2014 年 8 月 25 日 13 時 00 分～16 時 00 分）

※開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。

以下の第１問から第５問までの５問全てに解答せよ。

解答用紙は各問題２枚ずつある。解答とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。

受験番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第1問

1. 座標原点をOとし、平面P: $2x+2y+z=2$ が x 軸, y 軸, z 軸と交わる点をそれぞれA, B, Cとする。また、ベクトル場 $\boldsymbol{F} = y\,\boldsymbol{i} + z\,\boldsymbol{j} + x\,\boldsymbol{k}$ があるとする。ここで、$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸の正方向の単位ベクトルである。また、∇ (ナブラ) は

$$\nabla = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{1.a}$$

で定義されるものとする。

この時、以下の設問に答えよ。

(a) 立体OABCを図示せよ。

(b) 平面Pの単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ。ただし、ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは立体OABCに対して外向きとする。

(c) $\nabla \times \boldsymbol{F}$ (回転) を求めよ。

(d) A, B, Cの3点を頂点とする三角形の平面 S での面積分

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

を計算せよ (答えだけでなく途中経過も示せ)。ここで、$\mathrm{d}S$ は平面 S 上の面積素片である。

(e) △ABCの辺上を一周回 (A→B→C→A) する閉経路 ℓ に沿った積分

$$\int_\ell \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

を計算せよ (答えだけでなく途中経過も示せ)。ここで、$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は経路 ℓ 上の点での接線方向の線素ベクトルである。

なお、設問 (d) と (e) で求めた値は等しくなる。これを一般に、Stokesの定理と呼ぶ。

2. 式 $0 \le x \le 1$, および $0 \le y \le 2$, および $0 \le z \le 1 - y/2$ で定義される立体Qを考える。また、ベクトル場 $\boldsymbol{F} = x\,\boldsymbol{i} + 2y\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k}$ があるとする。ここで、$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸の正方向の単位ベクトルである。また、∇ (ナブラ) は (1.a) 式で定義されるものとする。

この時、以下の設問に答えよ。

(a) 上式で定義された立体Qを図示せよ。

(b) $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ (発散) を求めよ。

(c) 立体Qについての体積積分

$$\iiint_Q (\nabla \cdot \boldsymbol{F})\,\mathrm{d}V$$

を計算せよ (答えだけでなく途中経過も示せ)。ここで、$\mathrm{d}V$ は体積素片である。

(d) 立体Qの全表面 (S とする) についての面積分

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

を計算せよ (答えだけでなく途中経過も示せ)。なお、$\boldsymbol{n}$ は各面の単位法線ベクトルである。ただし、ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは立体Qに対して外向きとする。また、$\mathrm{d}S$ は立体の表面 S 上での面積素片である。

なお、設問 (c) と (d) で求めた値は等しくなる。これを一般に、Gaussの定理と呼ぶ。

$\boxed{\text{第 2 問}}$

一次独立な関数の組 $\{u_n(x)\}(n=0,1,2,3,\cdots)$ が与えられているとする。ここで、x、$u_n(x)$ は実数であり、定数 a、$b(>a)$ に対して、$a \le x \le b$ の区間を考えることとする。なお、任意の n に対して、次の積分値

$$\int_a^b [\,u_n(x)\,]^2 \,\mathrm{d}x$$

は有限の値をとるものとする。以下の **1**〜**3** の設問に答えよ。

1. 関数 $f_0(x)$ が、

$$f_0(x) \;=\; \frac{u_0(x)}{\sqrt{\int_a^b [\,u_0(x)\,]^2 \,\mathrm{d}x}} \tag{1}$$

と与えられ、さらに関数 $g_1(x)$ が、

$$g_1(x) = u_1(x) + c_{10} f_0(x) \tag{2}$$

で与えられるとする (c_{10} は定数)。このとき、

$$\int_a^b g_1(x) f_0(x) \,\mathrm{d}x = 0 \tag{3}$$

を満たすように c_{10} を求めよ。

2. 次のような関数の組 $\{g_n(x)\}(n=1,2,3,\cdots)$ を考える。

$$g_n(x) = u_n(x) + \sum_{m=0}^{n-1} c_{nm} f_m(x) \tag{4}$$

ここで、c_{nm} $(m=0,1,2,3,\cdots,n-1)$ は定数とする。また、実数の関数の組 $\{f_m(x)\}$ は、お互いに直交し、大きさは 1 に規格化されているものとする。つまり、

$$\int_a^b f_m(x) f_\ell(x) \,\mathrm{d}x = 0 \;\; (m \ne \ell), \quad \int_a^b [f_m(x)]^2 \,\mathrm{d}x = 1 \tag{5}$$

を満たすものとする。

このとき、$g_n(x)$ が、$f_m(x)$ $(m=0,1,2,3,\cdots,n-1)$ と直交するように、c_{nm} を求めよ。

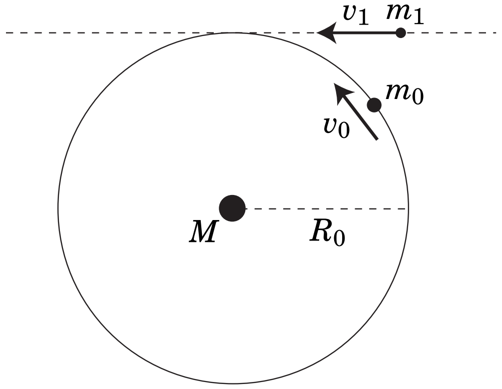
3. 関数の組 $\{u_n(x)\}$ として、$u_n(x) = x^n$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ を考える。また、x の区間として、$-1 \le x \le 1$ とする。このとき、設問 **1**、**2** の結果を応用して、お互いに直交し、与えられた x の区間で大きさが 1 に規格化された関数の組 $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ を求めよ。

第３問

以下の設問に答えよ。導出の過程が判るように記述すること。

1. (a) 質量 M の太陽と質量 m_0 の惑星からなる質点系を考える。惑星が太陽からの万有引力を受けて半径 R_0 の円軌道で公転しているときの惑星の公転速度 v_0 を求めよ。ただし万有引力定数を G とし、$M \gg m_0$ で太陽は動かないものとする。

   (b) この円軌道を描く惑星に、速度 v_1 で直線運動する質量 m_1 ($m_1 \ll M$) の小天体が図のように衝突し、そのまま合体したとする（完全非弾性衝突）。合体直後の惑星の速度 v_2 を求めよ。ただし、衝突前の惑星の円軌道と小天体の直線軌道は一つの平面内にあって接しており衝突は接点で起こるものとする。



   (c) 合体した惑星が太陽の周りを回り続ける条件式を表せ。ただし $M \gg m_1$ とし、 v_0 を使用しても良い。

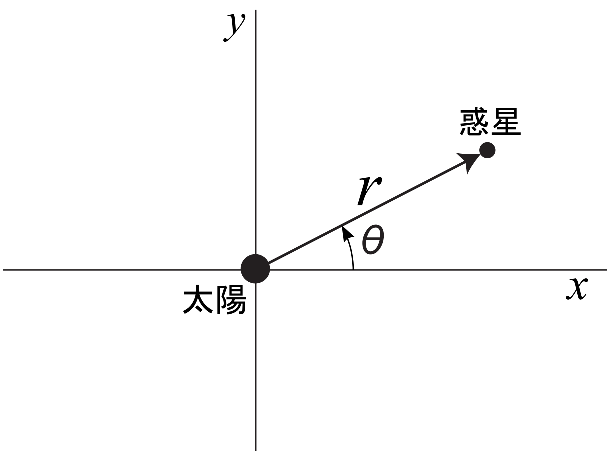
2. 設問 1 で、合体した惑星の位置が太陽を原点とする極座標 (r, θ) で図のように表せる時、合体した惑星の質量を m ($m \ll M$) として、次の各問に答えよ。

   (a) 合体した惑星のエネルギー保存の式を r、θ 及びそれらの時間微分と、M、m、R_0、v_2 を使って表せ。

   (b) 合体した惑星の原点のまわりの角運動量保存の式を r、θ 及びそれらの時間微分と、R_0、v_2 を使って表せ。

   (c) 上の (a)、 (b) の結果を使い、r を θ の関数と考えて、合体後の惑星軌道が満たす 1 階の微分方程式を求めよ。時間微分を使わないで表すこと。

   (d) 変数変換 $u = 1/r$ を使って (c) の微分方程式を解き、r を θ の関数として求めよ。積分定数は C のままで良い。



$\boxed{\text{第 4 問}}$

静電場 (電界) について以下の設問に答えよ。クーロンの法則の比例定数を $1/(4\pi\varepsilon_0)$ (ε_0 は真空の誘電率) とする。

1. 原点に点電荷 Q がある。このとき電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。ここで、$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトルである。

2. 原点を中心とする半径 a の球面に電荷面密度 σ で一様に電荷が分布している。このとき球の内側 ($r < a$) と外側 ($r > a$) の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。 ここで、$r = |\boldsymbol{r}|$ である。

3. 原点を中心とする半径 a の球に電荷密度 ρ で一様に電荷が分布している。

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \rho & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

   (a) 球の内側 ($r \leq a$) と外側 ($r > a$) の電場を求めよ。

   (b) 球の内側 ($r \leq a$) と外側 ($r > a$) の電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ を求め図示せよ。

   (c) $\phi(\boldsymbol{r})$ はポアソン方程式 $\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})/\varepsilon_0$ を満たしていることを確認せよ。

4. z 軸上の点 $z = d/2$ に Q、$z = -d/2$ に $-Q$ の点電荷がある。

   (a) $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ での電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

   (b) $r \gg d$ として遠方での電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ の近似形を求めよ。

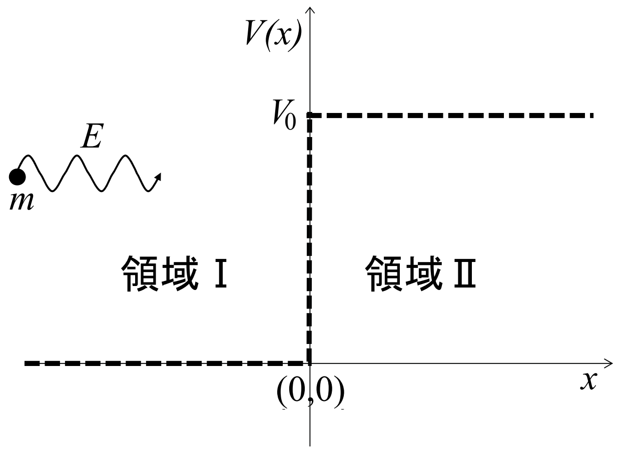
   (c) (b) のときの電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

第 5 問

図のような 1 次元階段ポテンシャルに、左から粒子が入射する場合を考える。入射する粒子の持つエネルギーを E、質量を m とし、ポテンシャル $V(x)$ は以下のように与えられるとする。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \quad 領域\,\mathrm{I} \\ V_0 & (x > 0) \quad 領域\,\mathrm{II} \end{cases}$$

ただし、$V_0 > 0$ とする。



この場合について以下の設問に答えよ。

1. $V(x)$ は時間に依存しないポテンシャルであり、そのもとで運動する質量 m の粒子を考えた場合、シュレディンガー方程式は一般に以下のようにかける。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = H\Psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\Psi(x,t)$$

ここで $\Psi(x,t)$ は時間を含む波動関数、H はハミルトニアン、$\hbar \equiv h/(2\pi)$ (h はプランク定数) である。

今、$\Psi(x,t) = f(t)\psi(x)$ とした場合、時間に依存しない波動関数 $\psi(x)$ が従うシュレディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

とかけることを示せ。ただし、E は定数であり、質量 m の粒子の持つエネルギーに等しいとする。

2. 領域 I 及び II について、時間に依らない波動関数 $\psi(x)$ が従うシュレディンガー方程式を示せ。

3. $E - V_0 > 0$ の場合について、各領域の波動関数 $\psi(x)$ を求めよ。

4. $E - V_0 > 0$ の場合について、反射率と透過率を求めよ。ここで、反射率及び透過率は以下のように確率流密度 S の絶対値の比として求められるものとする。

$$反射率 = \frac{|S_{反射波}|}{|S_{入射波}|}, \qquad 透過率 = \frac{|S_{透過波}|}{|S_{入射波}|}$$

ここで、確率流密度 S は入射波、反射波、または透過波の波動関数を $\psi_w(x)$ とした場合に、

$$S = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi_w^*(x)\frac{\mathrm{d}\psi_w(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\psi_w^*(x)}{\mathrm{d}x}\psi_w(x)\right]$$

(w は入射波、反射波、透過波のいずれか) で求められることを使ってよい。なお、$*$ は複素共役を意味している。

5. $E - V_0 < 0$ の場合について、各領域の波動関数 $\psi(x)$ を求めよ。

6. $E - V_0 < 0$ の場合について、反射率と透過率を求めよ。