

総合研究大学院大学先端学術院先端学術専攻
天文科学コース 五年一貫制博士課程
Graduate University for Advanced Studies, SOKENDAI
Astronomical Science Program
5-year doctoral program

2024 年度 4 月入学者選抜試験
The entrance examination for April 2024 admission

筆記試験（専門科目）問題
Written examination (Specialized subjects)

2023 年 8 月 23 日
August 23, 2023

以下の全ての問いに解答せよ。
Answer all the following questions.

解答は解答用紙に記入すること。
Answers must be placed in the answer sheets.

解答用紙とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。
All question sheets as well as the draft and answer sheets are to be collected at the end of the exam. Do not forget to provide your application number at the top of all draft and answer sheets as well as the cover sheet.

受験番号(Application No.) : _____ 氏名(Full Name) : _____

第1問

フーリエ変換可能な実関数 $f(x, t)$ に関する偏微分方程式が以下のように与えられているとする。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

ここで、 $-\infty < x < \infty$ 、 $t \geq 0$ とし、 α は正の定数とする。この偏微分方程式をフーリエ変換を用いて解くことを考え、以下の設問に答えよ。ただし、ここで任意の関数 $g(x)$ とそのフーリエ変換 $G(k)$ の関係は以下で与えられるとする。

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(k) e^{-ikx} dk,$$
$$G(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx.$$

なお、 x, k は実数である。

1. $f(x, t)$ のフーリエ変換 $F(k, t)$ が満たす、 t に関する偏微分方程式を求めよ。
2. 設問1で得られた偏微分方程式を満たす $F(k, t)$ を求めよ。ただし、 $F(k, t)$ が関数 $p(k), q(k, t)$ を用いて $F(k, t) = p(k) \exp(q(k, t))$ の形に書けることを用いてよい。また、初期条件として $F(k, 0) = 1$ とせよ。

3. 設問2の結果を用いて、 $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ と $f(x, t)$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

4. 設問3で得られた関係式と設問1で得られた偏微分方程式の類似性に留意しつつ $f(x, t)$ を求めよ。なお、必要なら

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を用いてよい。

5. $y = f(x, t)$ とし、 t を任意の値 ($t > 0$ とする) に固定したときに xy 平面上でこの関数の概形を図示せよ。また、 t の増加とともにその形状がどのように変化するかを簡単に記述せよ。

第2問

以下の設問に答えよ。導出の過程がわかるように記述すること。なお、 i は虚数単位を表す。また、 n は正の整数、 x, y は実数、 l, m, M, R は正の実数とする。

1. (a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^{22}$ を $x + iy$ の形で示せ。

(b) 複素数 z に関する方程式 $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n = 0$ ($a_0 \neq 0$ とし、各項の係数は実数とする) の全ての解の和を求めよ。

2. 複素数 z_1, z_2 について、 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ となることを示せ。

3. 複素数 z についての関数 $f(z)$ を複素平面上の曲線 C 上で連続な関数とし、また曲線 C 上の各点で $|f(z)| \leq M$ とする。曲線 C の長さを L としたとき、

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| dz \leq ML$$

となることを、経路区間の積分が n 個の微小区分からなる被積分関数の区分求積の極限值 ($n \rightarrow \infty$ としたときの極限值) である、ということを使って示せ。

4. 複素数 z に関して $|z| = R$ のとき、 $|f(z)| \leq M/R^l$ ($l > 1$) となるような M が存在するものとする。図1の経路 C_1 (複素平面において、 $z = R$ から半径 R で反時計まわりに $z = -R$ に至る半円) に沿った複素積分について以下を示せ。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z) dz = 0$$

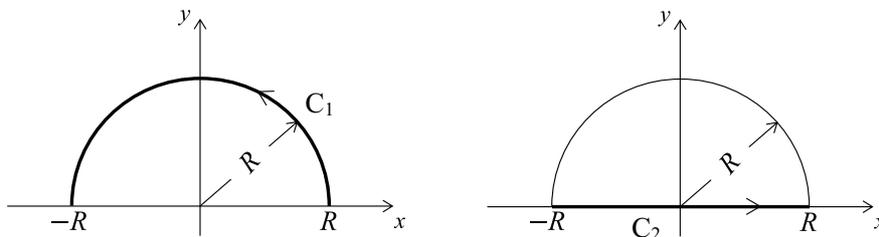


図1: 設問4、設問5で使用する積分経路 C_1 と C_2 。

5. 複素積分を利用して、以下の積分値を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx$$

ただし、積分値の求め方は留数定理を利用して以下の通りとする。被積分関数を複素数 z で表現し、図 1 の経路 C_1 と経路 C_2 からなる複素平面上的閉曲線に沿って複素積分を行う際に、 R を無限大とする極限をとる。

なお、複素平面上で反時計回りの周回積分 $\oint_C f(z) dz$ について、積分経路 C に囲まれた領域内にある特異点が n 個の 1 位の極のみである場合には、留数定理より

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(z_k)$$

となることが知られている。ここで、複素数 $z = z_k$ ($k = 1, \dots, n$) は 1 位の極であり、また $\text{Res}(z_k)$ は $z = z_k$ における留数で、

$$\text{Res}(z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z)$$

である。

第3問

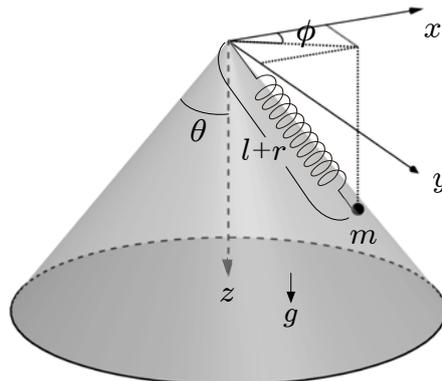
下図のような xyz 座標系中に円錐 (半頂角 θ) が置かれている。円錐の頂点と対称軸はそれぞれ座標原点および z 軸と一致している。この円錐の頂点に一端が固定されたバネが取り付けられており、頂点の周りに自由に回転できるものとする。このバネのバネ定数は k 、自然長は l で、もう一端には質量 m の質点がついており、円錐面上に置かれている。ここでバネの質量や太さ、円錐面上の摩擦は無視できるものとする。重力加速度を g (z 方向)、バネの自然長からの変位を r 、 z 軸周りの x 軸からの方位角を ϕ とし、以下の設問に答えよ。なお、これらの設問で扱うすべての角速度 ω ($\equiv \dot{\phi}$, ϕ の一階時間微分) に対して、 $k > m\omega^2 \sin^2 \theta$ が成り立ち、またバネ長 $(l+r)$ に比べ円錐の高さは十分にあるものとする。対称軸回りの質点の回転の向きは ϕ の増加する向きとする。

- 角速度 $\omega = \omega_0$ で質点が円錐面上を z 軸周りに等速円運動している。このときのバネの変位を $r = r_0$ とし、質点がバネから受ける力の大きさ $S (= kr_0)$ と円錐面から受ける垂直抗力の大きさ N を $m, g, l, r_0, \omega_0, \theta$ を用いて表せ。
 - 上の (a) の状態から、振動を起こさないようにゆっくりと角速度を増やしていくと、 r も徐々に大きくなり、 $r = r_c$ で質点は円錐面から離れて等速円運動を始めた。このときの角速度 $\omega = \omega_c$ を g, l, r_c, θ を用いて表せ。
- 次に、角速度は設問 1(b) で求めた ω_c 以下であり質点は常に円錐面上を運動するものとして、以下について答えよ。

- 力学系の運動エネルギーを K 、ポテンシャルエネルギーを U とすると、ラグランジアン \mathcal{L} は $\mathcal{L} = K - U$ と表すことができる。図で示された力学系のラグランジアン \mathcal{L} が以下で表せることを示せ。なお、 $\dot{r}, \dot{\phi}$ は r, ϕ の一階時間微分である。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 + \dot{\phi}^2 (l+r)^2 \sin^2 \theta \right] - \frac{1}{2}kr^2 + mg(l+r) \cos \theta$$

- 上の (a) のラグランジアンから、ラグランジュの運動方程式を \ddot{r} および $\ddot{\phi}$ (それぞれ r, ϕ の二階時間微分) について書き表せ。なお $m, g, l, k, \theta, r, \dot{r}, \dot{\phi}$ のうち必要な変数・定数を用いよ。
- 上の (b) で求めたラグランジュの運動方程式から角運動量が保存されていることを示せ。
- 質点が $\dot{\phi} = \omega_0$ で円錐面上を z 軸周りに等速円運動しており、 $r = r_0$ であった。このときの r_0 を $m, g, l, k, \theta, \omega_0$ を用いて表せ。
- 上の (d) の状態において、ある瞬間にバネを僅かに引き伸ばしすぐに離れたところ、 r および $\dot{\phi}$ がそれぞれ r_0, ω_0 のまわりで微小振動を始めた。ここで r の微小振動を $r = r_0 + \rho(t)$ ($r_0 \gg |\rho(t)|, \rho(t) = \rho_0 \sin \Omega_s t$) とする。角速度 $\dot{\phi}(t)$ を $\rho(t)$ および l, r_0, ω_0 を用いて表せ。また、 $\rho_0/(l+r_0)$ の 2 次以上の微小量は十分に小さく無視できるものとし、微小振動 $\rho(t)$ の角振動数 Ω_s を m, k, ω_0, θ を用いて表せ。

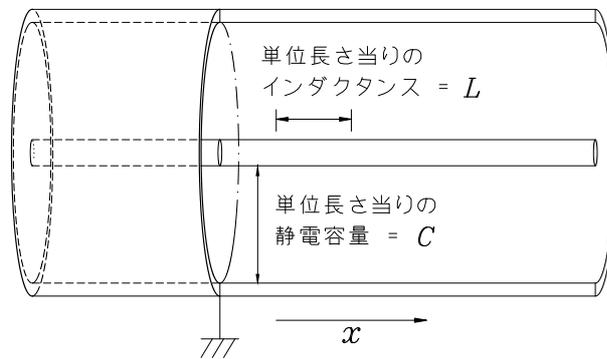


第 4 問

以下の設問に MKSA 単位系で答えよ。

1. 図のように非常に長い導電体の円筒（シールドと呼ぶ）の中心部に非常に長い電線（芯線と呼ぶ）を配置した、いわゆる同軸ケーブルに伝播する信号を考える。同軸ケーブルは、芯線に沿って微小なコイル (L) が連なりつつそれぞれのコイルの間から微小なコンデンサー (C) を経由してシールドに繋がっているモデル（微小な LC 回路が連なっているモデル）で近似できることがわかっている。本設問では、この近似モデルに沿って同軸ケーブルの巨視的な性質を論じる。

芯線に沿って x 座標を定義する。シールドの電位を 0 とし、時刻 t での芯線上の電圧と電流をそれぞれ $V(x, t)$ および $I(x, t)$ とする。単位長さあたりの芯線のインダクタンスを L 、単位長さあたりの芯線とシールドとの間の静電容量を C として、以下の設問に導出の過程ないし根拠がわかるように記述して答えよ。ここで、芯線とシールドの抵抗値は無視できるものとする。



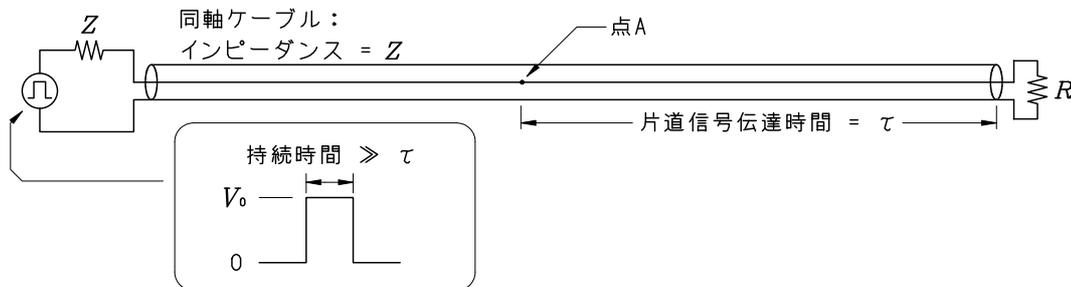
図：同軸ケーブルの模式図。接地記号を境に右側はシールドの手前側を取り去った状態を示している。

- (a) 一般に、静電容量 C のコンデンサに電荷 Q が蓄えられるとき、両端に現れる電位差を E として $CE = Q$ なる関係が成り立つ。これを用いて、 V と C と I の間に成り立つ関係を偏微分方程式で示せ。これを式 (1) とする。
- (b) 一般に、インダクタンス L のコイルに電流 I が流れているとき、両端に現れる電位差を E として $E = -L \frac{dI}{dt}$ なる関係が成り立つ。これを用いて、 V と L と I の間に成り立つ関係を偏微分方程式で示せ。これを式 (2) とする。
- (c) 式 (1) と式 (2) より、 $V(x, t)$ の満たす偏微分方程式および $I(x, t)$ の満たす偏微分方程式を示せ。これらを式 (3) および式 (4) とする。
- (d) この同軸ケーブルの特性インピーダンス（交流信号伝送時に芯線の各点で現れる電圧のそこに流れる電流に対する比） Z を示せ。
 ヒント：式 (3)(4) は波動方程式であり、その一般解は $f(x - vt) + g(x + vt)$ で与えられる。このことと式 (1)(2) を用いることで求めることができる。

2. 図のように電圧源と抵抗を用いて特性インピーダンス Z の同軸ケーブルに単発の矩形波を流すことを考える。

- 矩形波は内部抵抗が無視できる電圧源により供給される
- 電圧源と同軸ケーブル始点の間は値 Z の抵抗を介して接続される
- 同軸ケーブル終点では芯線は値 R の抵抗を介してシールドに接続される

このときケーブルの中間点に現れる電圧波形について考察する。



同軸ケーブル中は、芯線を電流が波動として有限の速さで伝わり、その各点では電流とケーブルのインピーダンスに応じた電圧が観測される。電流が伝わる方向はケーブルの長さ方向に対応して2方向（ここでは便宜的に「行き」「帰り」とよぶ）考えられるが、行きの電流と帰りの電流はよく見られる波動現象と同様に互いに干渉せず、また各点で観測される電圧は両方の電流によるものの和となる。

さらに簡略化のため、以下のような「理想条件」を設定する。

- 電圧源の立ち上がりおよび立ち下りは非常に速く、2つの電圧間の切り替わり時間は無視できるものとする
- 電源・同軸ケーブル・抵抗間を結ぶ配線は非常に短く、これによる影響は無視できるものとする
- 同軸ケーブルの抵抗値は無視できるものとする

このとき、以下の設問に答えよ。なお、導出の過程ないし根拠がわかるように記述すること。

- 矩形波の立ち上がりにおいて、同軸ケーブルの始点からは電圧源の振幅 V_0 に由来する矩形波電流が流れ込む。この矩形波電流の振幅 I_0 を求めよ。
- 同軸ケーブルの芯線を終点に向かって、振幅 I_0 の矩形波電流が流れてきたとする。矩形波の立ち上がりが終점에到達した後、その一部はそのまま終端抵抗に流れ、残りは反射して同軸ケーブル芯線を始点に向かって戻っていくことが知られている。この戻る電流の大きさを求めよ。
- 同軸ケーブル内部では電圧源から来る電流とケーブル終点から来る反射電流が重なり合って存在することになる。終点から反射電流が時間 τ をかけて到達する点 A においてシールドに対して認められる立ち上がりおよび立ち下り電圧波形を、 R の値域で場合分けして定量的に図示せよ。なお、電圧源からの単発矩形波の持続時間は τ に比べて非常に長いものとする。

第5問

一辺 L 、体積 $V(\equiv L^3)$ の立方体の箱の中を自由に運動している N 個の単原子理想気体 (1 個の質量 M) を考える。この系の温度を T 、状態を n とするとき、系の分配関数は

$$Z(T) = \sum_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T}\right)$$

で定義される。ここで、 k_B はボルツマン定数、 ε_n は状態 n のときの系のエネルギーである。

系の分配関数 $Z(T)$ を用いて、ヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, V, N)$ と内部化学ポテンシャル $\mu(T, V, N)$ は、それぞれ次のように求めることができる。

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln Z(T)$$

$$\mu(T, V, N) = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T, V}$$

ここで、ヘルムホルツの自由エネルギー F は N で微分可能とする。 \ln は自然対数である。

1. 以下の設問に答えよ。

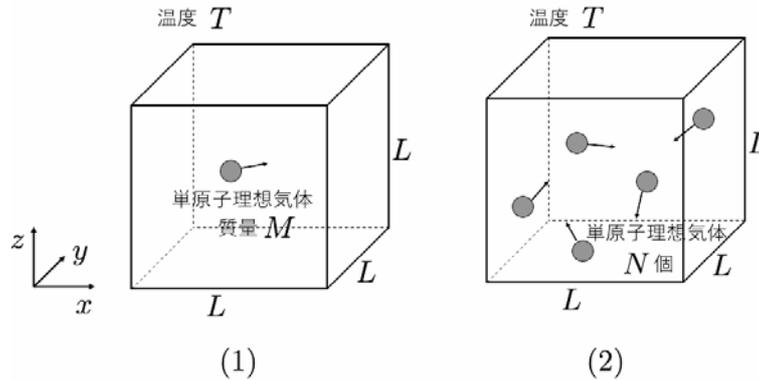


図 1: 一辺 L の立方体の箱の中を自由に運動している質量 M の単原子理想気体。(1) は原子が 1 個だけ入っている場合。(2) は同じ原子が N 個入っている場合。立方体の各辺がそれぞれ x, y, z 軸に対応している。

(a) 図 1 (1) に示すような、箱の中に単原子理想気体が 1 個だけ閉じ込められている場合 ($N = 1$) を考える。自由粒子の波動方程式とその解は

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi = \varepsilon \psi$$

$$\psi(x, y, z) = \psi_0 \exp\left(i \frac{n_x \pi x}{L}\right) \exp\left(i \frac{n_y \pi y}{L}\right) \exp\left(i \frac{n_z \pi z}{L}\right)$$

である。ここで、 \hbar は換算プランク定数 (ディラック定数)、 ψ は波動関数、 ε は系のエネルギー固有値、 ψ_0 は波動関数の振幅、 n_x, n_y, n_z は任意の正の整数である。座標系は図 1 で示すように立方体の各辺がそれぞれ x, y, z 軸に対応しているものとした。このとき、この系の状態 (モード) n に対するエネルギー固有値 ε_n を求めよ。ただし、 $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ である。

(b) 各モードのエネルギー固有値 ε_n の間隔が $k_B T$ に比べて十分に小さい場合、分配関数 $Z(T)$ 内の和は積分に帰着させることができる。このとき、1 個の単原子理想気体の分配関数 Z_1 は

$$Z_1 = \frac{C_Q}{C}$$

と記すことができる。ここで、 C は気体の濃度であり、原子が 1 個の場合は $\frac{1}{V}$ である。 C_Q は量子濃度と呼ばれる。この量子濃度を求めよ。なお、計算では定積分の公式

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を用いてよい。

- (c) 図 1 (2) のように、 $C \ll C_Q$ の古典的な振る舞いをする同じ単原子理想気体が N 個箱の中に入っている場合を考える。このときの系の分配関数 Z_N は

$$Z_N = \frac{1}{N!} Z_1^N = \frac{1}{N!} (C_Q V)^N$$

と表される。 $N \gg 1$ であるとき、スターリング近似

$$\ln N! \sim N \ln N - N$$

を用いて、この系のヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。ただし、気体の濃度 C と量子濃度 C_Q を用いた表記とすること。

2. 図 2 のように、高さ h だけ離れて十分に細いチューブで接続された等容量の 2 つの貯槽を考える。貯槽の内部には古典的な振る舞いをする ($C \ll C_Q$) 質量 M の同じ単原子理想気体が合計 $N (\gg 1)$ 個封入されており、一様な温度 T を持つ周囲の熱浴と熱平衡状態にある。また、貯槽の周囲の重力加速度 g は一定で、貯槽内の単原子理想気体はチューブを通して拡散的平衡状態にある。貯槽 1、2 自身の高さはお互いの距離 h より十分に小さく、各貯槽内での濃度は一定と仮定する。また、2 つの貯槽を連結するチューブ内の理想気体数は無視できるものとする。このとき以下の設問に答えよ。

- (a) 貯槽 1 の高さを重力ポテンシャルエネルギーの基準とする。貯槽 1 および 2 内での単原子理想気体の濃度をそれぞれ $C(0), C(h)$ とするとき、それぞれの貯槽での外場を含む全化学ポテンシャルを求めよ。ここでは、1. (c) と同様、スターリング近似と濃度 C 、量子濃度 C_Q を用いて記せ。
- (b) 貯槽 1 の気体の濃度 $C(0)$ は貯槽 2 の気体の濃度 $C(h)$ の何倍か？

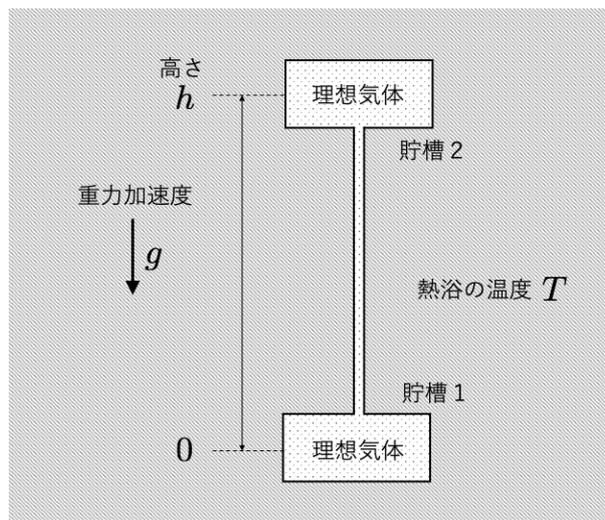


図 2: 高さ h だけ離れて十分に細いチューブで接続された等容量の 2 つの貯槽と内部に封入された合計 N 個の同じ単原子理想気体。

正誤表／Errata

The parts written only in Japanese do not concern the English version

- [第1問/Problem 1]

- 【誤/Wrong】 実関数 $f(x, t)$ / a real function $f(x, t)$

- 【正/Correct】 フーリエ変換可能な実関数 $f(x, t)$ / a real, Fourier-transformable function $f(x, t)$

- [第3問/Problem 3]

- 対称軸回りの質点の回転の向きは ϕ の増加する向きとする。また、図は3ページ目のものに差し換える

- The direction of the rotation of the point mass around the axis of symmetry is towards the direction ϕ increases. Replace the figure with the one in page 3

- [第3問/Problem 3]2(e)
 - 【誤/Wrong】 $(r_0 \gg |\rho(t) = \rho_0 \sin \Omega_s t|)$
 - 【正/Correct】 $(r_0 \gg |\rho(t)|, \rho(t) = \rho_0 \sin \Omega_s t)$
- [第4問] 1(a)
 - 【誤】 静電容量 C
 - 【正】 静電容量 C のコンデンサ
- [第4問] 1(b)
 - 【誤】 インダクタンス L
 - 【正】 インダクタンス L のコイル
- [第4問] 1(b)
 - 【誤】 V と L の I
 - 【正】 V と L と I
- [第4問] 1(d)
 - 【誤/Wrong】 インピーダンス/impedance
 - 【正/Correct】 特性インピーダンス/characteristic impedance

