総合研究大学院大学先端学術院先端学術専攻
天文科学コース　五年一貫制博士課程
Graduate University for Advanced Studies, SOKENDAI
Astronomical Science Program
5-year doctoral program

2023 年度 4 月入学者選抜試験
The entrance examination for April 2023 admission

筆記試験（専門科目）問題
Written examination (Specialized subjects)

2022 年 10 月 26 日
October 26, 2022

以下の全ての問いに解答せよ。
Answer all the following questions.

解答は解答用紙に記入すること。
Answers must be placed in the answer sheets.

解答用紙とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。
All question sheets as well as the draft and answer sheets are to be collected at the end of exam.　Do not forget to provide your application number at the top of all draft and answer sheets as well as the cover sheet.

受験番号(Application No.)：________________　氏名(Full Name)：____________________

第１問

以下の設問に答えよ。

1. n を正の整数とし、$n \times n$(n 行 n 列) 型の行列を M とするとき、$M\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$ を満たすゼロベクトルではないベクトル $\mathbf{r}$ とスカラー (数値）λ の組み合わせが存在するとき、$\mathbf{r}$ を M の固有ベクトル、λ を M の固有値とよぶ。以下の 2 つの行列 A、B について、すべての固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。ただし、$i = \sqrt{-1}$（虚数単位）とする。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. U、V、W は各々$n \times n$ 型行列とする (n は正の整数)。また、各行列の (j,k) 成分を各々u_{jk}、v_{jk}、$w_{jk}$$(j,k = 1,2,\cdots,n)$ で表す。ここで、行列 U が行列 V と行列 W の積で与えられるとする (成分表示では、$u_{jk} = \sum_{\ell=1}^{n} v_{j\ell}w_{\ell k}$)。そして、$U$、$V$、$W$ の転置行列　(行列の (j,k) 成分を (k,j) 成分に入れ替えてできる行列）を各々${}^tU$、${}^tV$、${}^tW$ とし、これらの (j,k) 成分を各々${}^tu_{jk}$、${}^tv_{jk}$、${}^tw_{jk}$ と表す。このとき、

$${}^tU = {}^tW\,{}^tV \tag{1}$$

となることを証明せよ。

3. 行列 C の成分をその共役複素数（虚数単位 i を $-i$ で置き換えたもの）に換えた行列を C の複素行列とよび、$\bar{C}$ で表すとする。さらに、行列 $\bar{C}$ の転置行列 ${}^t(\bar{C})$ を C の随伴行列とよび、C^* で表すとする ($C^* = {}^t(\bar{C}) = \overline{({}^tC)}$)。以下の問いに答えよ。

(a) 3 つの行列 D、E、F の積 (DEF) が次の式を満たすことを示せ。

$$(DEF)^* = F^*E^*D^* \tag{2}$$

(b) $n \times n$ 型 (n は正の整数) の行列 H が $H^* = H$ を満たすときは、H をエルミート行列とよぶ。このエルミート行列 H の (j,k) 成分を h_{jk} と表すとき $(j,k = 1,2,\cdots,n)$、H の対角成分 h_{jj} は実数であることを示せ。

4. 設問 3 の (b) で定義したエルミート行列 H($n \times n$ 型行列) に関して、H の固有値と固有ベクトルを考える。λ_ℓ、$\lambda_m$$(\ell, m = 1,2,\cdots,n)$ が H の固有値で、各々に対応する固有ベクトル（列ベクトル）を $\mathbf{r}_\ell$、$\mathbf{r}_\mathrm{m}$ とすると次の 2 つの式のように書ける。

$$H\mathbf{r}_\ell = \lambda_\ell \mathbf{r}_\ell \tag{3}$$

$$H\mathbf{r}_\mathrm{m} = \lambda_m \mathbf{r}_\mathrm{m} \tag{4}$$

なお、固有ベクトル $\mathbf{r}_\ell$、$\mathbf{r}_\mathrm{m}$ の 各々の大きさはゼロではないので、$\mathbf{r}_\ell$、$\mathbf{r}_\mathrm{m}$ の各々の随伴行列（行ベクトル）を $\mathbf{r}_\ell^*$、$\mathbf{r}_\mathrm{m}^*$ とすると、$|\mathbf{r}_\ell|^2 = \mathbf{r}_\ell^*\mathbf{r}_\ell \neq 0$、$|\mathbf{r}_\mathrm{m}|^2 = \mathbf{r}_\mathrm{m}^*\mathbf{r}_\mathrm{m} \neq 0$ となる。次に、(3) 式の両辺に $\mathbf{r}_\mathrm{m}^*$、(4) 式の両辺に $\mathbf{r}_\ell^*$ をかけると以下のような式が得られる。

$$\mathbf{r}_\mathrm{m}^* H\mathbf{r}_\ell = \lambda_\ell \mathbf{r}_\mathrm{m}^*\mathbf{r}_\ell \tag{5}$$

$$\mathbf{r}_\ell^* H\mathbf{r}_\mathrm{m} = \lambda_m \mathbf{r}_\ell^*\mathbf{r}_\mathrm{m} \tag{6}$$

以下の問いに答えよ。

(a) (6) 式を用いて、次式が成り立つことを示せ。

$$\mathbf{r}_\mathrm{m}^* H\mathbf{r}_\ell = \overline{\lambda_m}\mathbf{r}_\mathrm{m}^*\mathbf{r}_\ell \tag{7}$$

ただし、$\overline{\lambda_m}$ は、λ_m の共役複素数とする。

(b) (5) 式と (7) 式を用いて、エルミート行列 H の固有値は実数であることを示せ。

(c) $\ell \neq m$ に対して、$\lambda_\ell \neq \lambda_m$ とする。このとき、

$$\mathbf{r}_{\mathrm{m}}^{*}\mathbf{r}_{\ell} = 0 \tag{8}$$

となることを示せ。

(d) 設問 1 の行列 A、B の固有ベクトルが、(8) 式を満たすことを示せ。

第 2 問

1. 閉区間 $[a, a+2\pi]$ (a は実定数) において、区分的に連続で積分可能な実関数 $f(x)$ を考える。この $f(x)$ は、三角関数の直交系 $(1, \cos mx, \sin mx)$、$(m = 1, 2, \cdots)$ を用いて以下のように級数展開する事ができる。

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx) \quad (1)$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos mx\,dx \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \quad (2)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin mx\,dx \quad (m = 1, 2, \cdots) \quad (3)$$

この時、(1) 式の右辺をフーリエ級数、a_m、b_m をフーリエ係数と呼ぶ。

$$f(x) = x^2 \quad (4)$$

とした場合に次の問いに答えよ。

(a) $a = -\pi$ として、範囲 $[-\pi, \pi]$ の関数 $f(x)$ が周期 2π で繰り返される関数を $g(x)$ とする。関数 $g(x)$ のフーリエ級数を求めよ。ここで、$g(x)$ は区分的に連続で周期条件を満たすため、フーリエ級数は一様かつ絶対収束する。

(b) 次に、同じ関数 $f(x)$ で $a = 0$ とし（範囲は $[0, 2\pi]$ ）、$f(x)$ が周期 2π で繰り返される関数 $h(x)$ に対するフーリエ級数を求めよ。$h(x)$ は区分的に連続でかつ区分的になめらかな関数であるため、一様に収束する。

(c) 次の式が成り立つ事を証明せよ。

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12} \quad (5)$$

2. 開区間 $(0, \infty)$ で定義される関数 $f(x)$ が、複素数 s に対して

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0+}\lim_{X \to \infty}\int_{\epsilon}^{X} e^{-sx}f(x)dx \quad (6)$$

が存在するときに、$F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$ を $f(x)$ のラプラス変換という。本問では、ラプラス変換を使用して、次の 2 階微分方程式

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \quad (7)$$

の解を求める。ここで、$y = y(x)$ とし、$y(x)$ の x に対する 1 階微分を y'、2 階微分を y'' とする。

(a)

$$f(x) = e^{ax} \quad (8)$$

に対するラプラス変換 $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$ を求めよ。ただし、a は正の実定数とし、$Re(s) > a$ を満たすとする。

(b) y'、y'' のラプラス変換を $F(s)$、$y(0)$、$y'(0)$ を用いて書け。この時、$\lim_{X\to\infty} e^{-sX}y(X) = 0$、$\lim_{X\to\infty} e^{-sX}y'(X) = 0$ が成り立つ。

(c) (7) 式の微分方程式をラプラス変換し、その解を求めよ。ただし、$y'(0) = y(0) = 0$ を境界条件とする。

(d) 前問のラプラス変換を逆ラプラス変換 $\left(\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(x)\right)$ し、微分方程式の解を求めよ。

第３問

質量 M の恒星 A の周りを質量 m の惑星 B が周回しており、この二つの天体には双方からの万有引力（万有引力定数:G）だけが働く。恒星 A と惑星 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathbf{A}}$、$\boldsymbol{r}_{\mathbf{B}}$ で表し、恒星 A に対する惑星 B の相対ベクトルを $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{r}_{\mathbf{A}}$ と定義し、恒星 A と惑星 B 間の距離を $r \equiv |\boldsymbol{r}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{r}_{\mathbf{A}}|$ とする。またこれらの天体は質点として考えることができ、かつ相対論的効果は考慮しないとする。さらに M、m は時間変化しない。このような系 (図 1) を考え、以下の設問に答えよ。設問 1 以外の解答は、導出の過程がわかるように記入すること。

1. この二つの天体の重心位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathbf{G}}$ を、M、$\boldsymbol{r}_{\mathbf{A}}$、$m$、$\boldsymbol{r}_{\mathbf{B}}$ を使って表せ。
2. この系では二つの天体の重心は止まっているか、もしくは等速度運動することを示せ。
3. 恒星 A に対する惑星 B の相対ベクトル $\boldsymbol{r}$ の時間発展を示す微分方程式を書け。
4. 惑星の運動を示す法則にケプラーの法則がある。その第二法則である「惑星と太陽 (恒星) とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は一定である。」を、設問 3 で求めた式を基に証明せよ。
5. 惑星 B が周回すると共に恒星 A も周期運動する。恒星 A を長期にわたり精密に観測することで、周期運動の視線方向速度と周期を求めることができる。一方恒星 A の質量 M は、恒星の光度や表面温度等の観測値より推定できる。ここで観測者は、これらの天体から遠く離れた惑星 B の軌道面と同じ平面上におり、二つの天体の重心位置に対して静止しているとする。また以下の設問にかぎり、惑星 B の軌道は真円とする。なお、図 1 の様に惑星 B の軌道面に直交座標系を考え、その x 軸は二つの天体の重心位置と観測者をつなぐ直線と平行とする。これらの前提を基に、以下の問いに答えよ。

   (a) 設問 3 で求めた相対ベクトルの時間発展を示す微分方程式を解き、相対ベクトルの x および y 成分それぞれを時間 t の関数として書け。

   (b) 観測される恒星 A の視線方向速度を時間 t の関数として書け。

   以下の二つの設問では、$M + m \approx M$ とできるほど m は M に比べて小さいとする。

   (c) 恒星 A の質量 M と周期運動の周期 P をつかって恒星 A から惑星 B までの距離 r を書け。

   (d) 恒星 A の質量 M、周期 P と視線方向速度の振幅 v_{D} をつかって惑星 B の質量 m を書け。

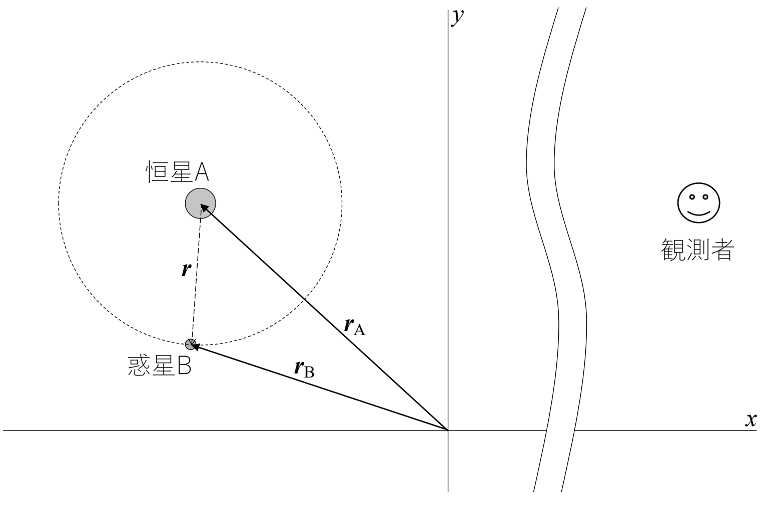

図 1: xy 平面上で恒星 A を周回する惑星 B と観測者

第 4 問

以下の問 1 から問 3 について答えよ。なお、以下では、MKSA 単位系を使う。真空の誘電率、透磁率はそれぞれ ε_0、μ_0 とし、c を真空での光速度とすると $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ の関係が成り立つ。

1. 静電場内にある電荷の位置エネルギーは電位とよばれるスカラー量である。これと同様に静磁場内での磁界を求めるには磁位を考えると便利である。図 1 のように電流 I が閉曲線に流れているとき、閉曲面が作る領域の立体角が Ω になる点に生ずる磁位 ϕ は、閉回路を縁とし、面に垂直な方向に磁化した強さ $\mu_0\boldsymbol{I}$ の板磁石のつくる磁場のポテンシャルに等しく、

$$\phi = \frac{I\Omega}{4\pi} \tag{1}$$

と表される（アンペールの等価磁石の法則）。必要ならこの法則を用いて、以下の問に答えよ。

(a) 半径 a の円形の導線に電流 I が流れているとき、円の中心 O から x の距離にある中心軸上の点での磁界を求めよ。

(b) 円の中心 O から半径に比べて十分に離れた距離 r の点 P($r \gg a$、軸上でなくてもよい) に生ずる磁界 $\boldsymbol{H} = (H_r, H_\theta)$ を求めよ。ただし、OP が円の中心軸となす角を θ とする。H_r と H_θ はそれぞれ r 方向、θ 方向の磁界の成分である。

2. 電荷が $\pm q$ $(q > 0)$ の 2 つの点電荷が接近して置かれたものを電気双極子と呼び、$-q$ から $+q$ に向かう変位ベクトルを $\boldsymbol{l}$ としたとき $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$ を電気双極子モーメントと呼ぶ。いま電気双極子の両端にある電荷が $\pm q(t) = \pm q_0 \sin\omega t$ で変化している場合、この電気双極子 $\boldsymbol{p}$ は電磁波を放射する。この電気双極子が放射する電磁波は、l の長さの微小導線に時間変動する電流 $I(t) = dq(t)/dt$ が流れた場合と等価になる。図 2 に示したように、z 軸に沿って原点に置かれた長さ l の微小な直線導線に電流 $I(t)$ が流れているとき、 遠方の点 P（原点からの距離 r、$r \gg l$）に作る電界 $\boldsymbol{E}$ と磁界 $\boldsymbol{H}$ は、球座標系を使うと以下のように表される。

$$\boldsymbol{E} = \frac{l}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{\partial}{\partial t} I\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin\theta \boldsymbol{e}_\theta \tag{2}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{l}{4\pi c r}\frac{\partial}{\partial t} I\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin\theta \boldsymbol{e}_\varphi \tag{3}$$

ここで $\boldsymbol{e}_\theta$ と $\boldsymbol{e}_\varphi$ はそれぞれ θ と φ 方向の単位ベクトルである。

(a) この電気双極子が放射する電界と磁界の大きさを q_0、ω、c などを使って表せ。

(b) この電気双極子の遠方での放射エネルギー（単位時間に単位面積を通過するエネルギー流）は、ポインティングベクトル $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ で与えられる。点 P でのポインティングベクトルの大きさを求め、半径 r の球面から単位時間あたりに放射される平均の放射エネルギーが

$$W = \frac{\mu_0\omega^4(q_0 l)^2}{12\pi c} \tag{4}$$

となることを示せ。必要なら

$$\int_0^\pi \sin^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{4}{3} \tag{5}$$

や三角関数の倍角の公式

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \tag{6}$$

を使え。

3. 図 3 のように xy 平面上にある半径 a の円周上を一定の角速度 ω で回転している点電荷 e から放射されるエネルギーを求めよう。以下の問に答えよ。

x、y、z 軸と OP のなす角度を θ_x、θ_y、θ とし、点 P の接平面に沿った、これらの角度方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_{\theta_x}$、$\boldsymbol{e}_{\theta_y}$、$\boldsymbol{e}_{\theta}$ とする。また、$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta = 1$ が成り立つ。

(a) 原点を中心とする半径 r（$r \gg a$）の球表面から放射される単位時間あたりの平均の放射エネルギーを求めよ。必要なら、式 (4) で示された放射エネルギーの表式を使っても良い。

(b) 任意の半径半径 r（$r \gg a$）での電界が z 軸上では直線偏光しているか円偏光しているか根拠を示して答えよ。

注：電界の振幅方向が時間とともに円を描く場合は円偏光、振幅の方向が一定面内にある場合は直線偏光である。

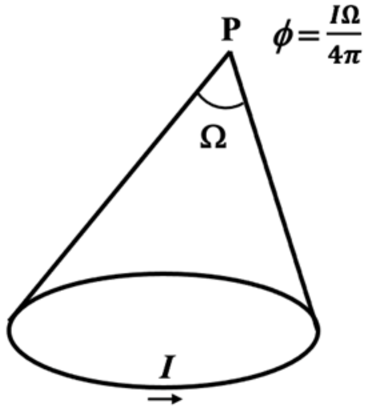

図 1: 閉曲線に流れる電流

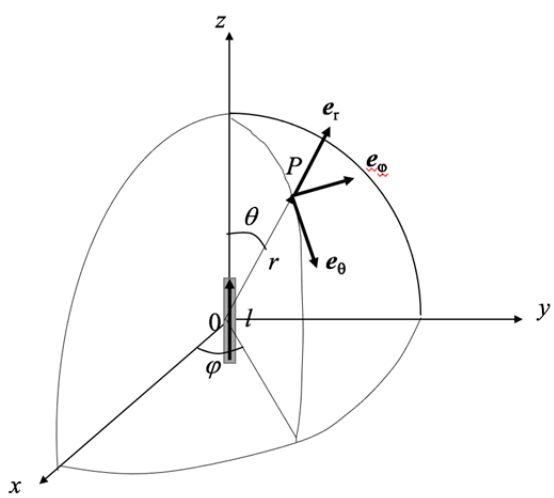

図 2: 微小導線のつくる電磁場

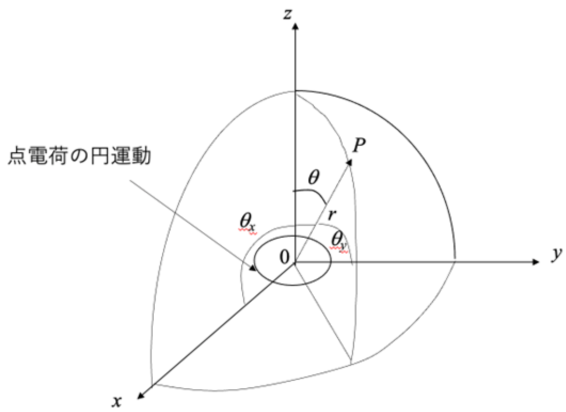

図 3: 円運動する点電荷からの放射。$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta = 1$ の関係が成り立つ

第 5 問

一辺の長さが L の立方体の容器に質量 m の単原子の気体分子が N 個入っている。容器の一つの角を原点とする座標系をとり、容器の辺と平行に x、y、z 軸をとる。また、この容器は $x \geq 0$、$y \geq 0$、$z \geq 0$ の領域にある。また、容器内の温度は T であり、気体分子の速度を $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とする。速度が v_x から $v_x + dv_x$、v_y から $v_y + dv_y$、v_z から $v_z + dv_z$ の範囲 (ここで dv_x、dv_y、dv_z は微小量) にある平均の気体分子数を

$$f(\boldsymbol{v}) dv_x dv_y dv_z$$

として分布関数 $f(\boldsymbol{v})$ を定義すると、

$$f(\boldsymbol{v}) = N \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}} T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}} T} \right)$$

となる。これをマクスウェル-ボルツマンの速度分布則という。ここで、k_{B} はボルツマン定数であり、$v = |\boldsymbol{v}|$ である。また、気体分子の運動は非相対論的であり、容器外は真空とする。以下の問では導出も示すこと。必要があれば、ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-bx^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-bx^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{b^{3/2}}$$

を用いてよい。

1. 容器中の気体分子の数密度を求めよ。

2. 容器の中に仮想的な面積素片 s を考える。この面積素片は、x 軸に垂直であり、その中心座標を (x_s, y_s, z_s) とする一辺 $2a$ の長さを持つ正方形とする。

   (a) ある速度 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ を持つ気体分子が時刻 t から時刻 $t + dt$ の間に x が増加する向きに面積素片を横切った。このとき、この気体分子は面積素片を通して $m\boldsymbol{v}$ の運動量を運ぶ。

      i. この気体分子が面積素片を横切るために、気体分子の時刻 t の位置 (x, y, z) が満たすべき条件式を求めよ。

      ii. 上で求めた条件式を満たす体積を求めよ。

   (b) 面積素片の両側が及ぼしあう圧力を求めよ。

3. $x = L$ の x 軸に垂直な容器の壁に面積 S の穴があいており、気体分子が漏れ出している。漏れ出す気体分子の数は少なく、N に比べて無視できるとする。

   (a) 単位時間当たりに穴から漏れ出る気体粒子のうち、v_x から $v_x + dv_x$ の範囲 (ここで dv_x は微小量) の速さをもつ気体分子数の平均を求めよ。

   (b) 単位時間当たりに漏れ出る気体分子の個数を求めよ。

4. 気体分子が波長 λ_0 の電磁波を放射する場合を考える。以下、気体分子によって放射された電磁波を輝線という。いま、容器外で静止している観測者が $x = L$ の x 軸に垂直な容器の壁に開いた小さな穴から気体分子が放射する輝線を観測した。静止している気体分子 1 個が放射する輝線は、（自然幅が無視できるほど小さく）図 1 のようなデルタ関数の形をしているとし、全波長で積分した強度は i_0 である。このとき、速度 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ で動く気体分子から放射された輝線を観測者が観測する場合、観測される輝線の波長 λ は、光速 c を用いて、

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{v_x}{c} \right)$$

となる。その結果、図 2 のように、広がった強度分布を持つスペクトルとして観測された。

(a) 観測者が観測する輝線スペクトルを波長 λ から $\lambda + d\lambda$ の範囲 (ここで $d\lambda$ は微小量) で積分した強度を $I_\lambda d\lambda$ とする。I_λ を求めよ。

(b) 観測者が観測する輝線スペクトルのピークの強度 $I_{\max}$ とその波長 $\lambda_{\max}$ を求めよ。

(c) 観測者が観測する輝線スペクトルの強度がピーク強度の $\frac{1}{e}$ となる波長 $\lambda_{1/e}$ ($I_{\lambda_{1/e}} = \frac{1}{e} I_{\max}$) を求めよ。ここで e は自然対数の底である。この幅は容器内の温度 T に関係しており、輝線スペクトルの広がりから容器内の温度を求めることができる。

(d) 観測者が観測する輝線スペクトルを全波長で積分した強度 I を求めよ。

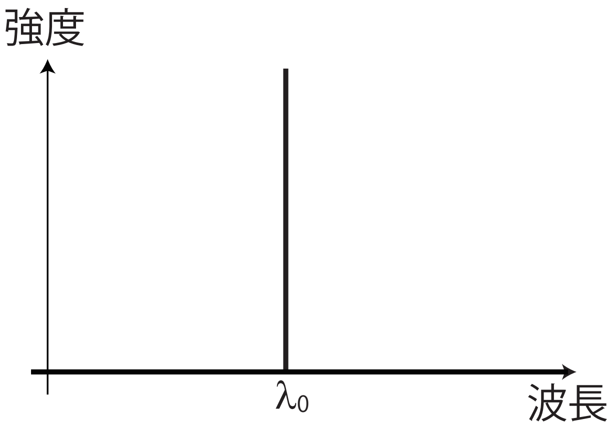

図 1: 気体分子 1 個が放射する輝線スペクトル

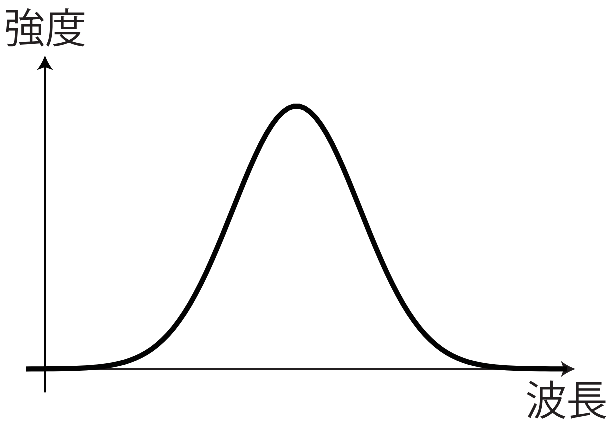

図 2: 観測者の観測する輝線スペクトル

筆記試験（専門科目） 問題

・第 1 問 設問 4

【誤】固有ベクトル r の添え字mが立体（ローマン体）になっている

【正】固有ベクトル r の添え字mはイタリック体*m*が正しい

・第 4 問 設問 1 3-4 行目

【誤】「…閉回路を縁とし、面に垂直な方向に磁化した…」

【正】「…閉回路を縁とした平面に垂直な方向に磁化した…」

・第 4 問 設問 1 (1)式の上の行

【誤】$\boldsymbol{I}$（ボールドイタリック）

【正】I（イタリック）

・第 4 問 設問 1 (1)式の下の行

【誤】「…アンペールの等価磁石の法則）。必要なら…」

【正】「…アンペールの等価磁石の法則。閉回路を含む平面をはさんで、電流の向きが反時計回りに見える側では、Ω の符号が正(図 1)、反対側では負となる。）必要なら…」

・第 4 問 設問 1(a)

末尾に以下を追加。

【追加】「ただし、その点からみたとき、電流は反時計回りに流れている。」

・第 4 問 設問 3 (b)

【誤】任意の半径半径 $r(r \gg a)$ での電界が

【正】原点を中心とする半径 $r(r \gg a)$ の球表面での電界が