総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻五年一貫制博士課程
SOKENDAI (GUAS) Department of Astronomical Science
5-year doctoral program

2020 年度 4 月入学者選抜試験
The entrance examination for April admission (FY 2020)

筆記試験（専門科目）問題
Written examination (Specialized subjects)

2019 年 8 月 28 日
August 28, 2019

以下の全ての問いに解答せよ。
Answer all the following questions.

開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。
Do not open this booklet until there are instructions to do so.

解答は解答用紙に記入すること。
Answers must be placed in the answer sheets.

解答用紙とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。
All question sheets as well as the draft and answer sheets are to be collected at the end of exam.　Do not forget to provide your application number at the top of all draft and answer sheets as well as the cover sheet.

受験番号(Application No.)：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名(Full Name)：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\text{第 1 問}}$

以下の設問 1 ～ 4 に答えよ。ただし、変数 x、y、s、k は実数とする。また、i は虚数単位とする。

1. 次の二次元ガウス型関数の積分 I の値が π に等しくなることを、極座標への変数変換を利用して示せ。

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

2. 次のガウス型関数どうしの畳み込み積分を計算せよ。

$$C(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-(x-s)^2}\, dx$$

3. 次のガウス型関数のフーリエ変換を計算せよ。

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-ikx}\, dx$$

4. 次のガウス型関数どうしの畳み込み積分のフーリエ変換 $G(k)$ を計算せよ。また、設問 3 で求めた $F(k)$ を使って $G(k)$ を表せ。

$$G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-(x-s)^2} dx \right] e^{-iks} ds$$

第 2 問

実関数列 $\{P_k\}$(k は非負整数, $k = 0, 1, 2, ...$) があり、以下の 2 つの微分方程式が成り立っているとする。

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \tag{1}$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t) \quad (k = 1, 2, ...) \tag{2}$$

ここで、$t \geq 0$ とし、λ は正の定数とする。また、$k = 0$ のとき $P_0(0) = 1$ とし, $k = 1, 2, ...$ のときは $P_k(0) = 0$ とする。また、$0! = 1$ はすべての設問において使って良い。このとき、以下の設問に答えよ。

1. $P_0(t)$ を t の関数として求めよ。

2. $P_1(t)$ を t の関数として求めよ。

3. 数学的帰納法を使って、$P_k(t)$ を t の関数として求めよ。

4. 設問 3 で得られた $P_k(t)$ を、パラメータ λ および t に対する k の関数と考えると、これは確率変数 X が k という値をとる確率と見ることもできる。この場合の確率変数 X の平均値 $\sum_{k=0}^{\infty} kP_k(t)$ を求めよ。

5. パラメータ p $(0 < p < 1)$ に対して、以下の実関数列 $\{B_k(p)\}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ を考える。

$$B_k(p) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k (1-p)^{n-k}$$

ただし、n は正の整数で、$n!$ は n の階乗を表し、また、$0! = 1$ とする。設問 4 と同様に、この $B_k(p)$ を確率変数 X が k という値をとる確率と考えることもできる。この場合の確率変数 X の平均値が、設問 4 で求めた平均値と一致するために p が取るべき条件を求めよ。また、このようにして p を定めた上で、$k \ll n$ として $n \to \infty$ の極限をとると、ある条件下で k の関数としての $P_k(t)$ と $B_k(p)$ は一致する。その条件を示せ。

$\boxed{\text{第 3 問}}$

平面極座標 (r, θ) で記述される 2 次元空間内において、中心力ポテンシャル

$$U(r) = -\frac{1}{\alpha}\frac{k}{r^{\alpha}}$$

のもとで質量 m の質点が平面運動をする。なお、定数 $k > 0$、実定数 $\alpha \neq 0$ である。

1. 質点のラグランジアンを平面極座標表記で書け。

2. 質点の運動方程式を書け。また、角運動量 M が保存することを示せ。

3. 全力学的エネルギーを $m, r, \dot{r}, k, \alpha, M$ を使って表せ。また、この全力学的エネルギーのうち、遠心力のポテンシャルエネルギーを表す項を示し、その理由も述べよ。なお、$\dot{r} = dr/dt$ である。

4. 設問 3 の全力学的エネルギーのうち、中心力ポテンシャルと遠心力ポテンシャルの和を有効ポテンシャル $W(r)$ とする。以下の (a)–(c) で与えられた条件において $W(r)$ の概形をそれぞれ図示せよ。

   (a) $\alpha < 0$

   (b) $0 < \alpha < 2$

   (c) $\alpha > 2$

5. 設問 4 の各場合に、質点は限られた条件のもとで円軌道上を運動する。その円軌道の半径 r_0 を M, m, k, α を使って表せ。

6. 設問 4 の (b) の場合に質点が円軌道上を運動していたとする。またこのとき、動径方向に力が加わって、軌道がわずかだけ変化したとしよう。質点の動径方向の位置を $r = r_0 + \delta r$（r_0 は設問 5 で求めた半径）として、微小量 δr の満たす微分方程式を求めよ (δr の二次以上の項は無視してよい)。また、この微分方程式の解が単振動を表すことを示し、その周期を M, m, α, r_0 を使って表せ。

第 4 問

以下の設問に答えよ。本問では SI 単位系を使用し、真空の誘電率を ϵ_0、真空中の光速を c とする。

1. 静電場中の電気双極子を考える。

(1) 図 1 に示すように、真空中の $(x, y, z) = (0, 0, d/2)$ に正の点電荷 $q(> 0)$、$(x, y, z) = (0, 0, -d/2)$ に負の点電荷 $-q$ が置かれている。このような $\pm q$ の電荷配置は電気双極子と呼ばれ、電気双極子モーメント $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ で特徴付けられる。ここで、$\mathbf{d}$ は負電荷の位置から正電荷に向けて引いた位置ベクトルで、$d = |\mathbf{d}|$ である。$p = |\mathbf{p}|$ として、2 つの電荷から十分離れた $(d \ll r)$ 任意の位置 $\mathrm{P}(r, \theta, \phi)$ における静電ポテンシャル V を p と極座標パラメータ（r, θ, ϕ）を用いて表せ。このとき (d/r) の二次以上の項は無視せよ。

(2) 設問 (1) のとき、位置 P における電場 $\mathbf{E}$ の極座標成分 E_r、E_θ、E_ϕ をそれぞれ求めよ。

(3) 正の点電荷 $q(> 0)$ と、点電荷を中心とする半径 a の球内に一様に分布する負電荷 $-q$（総量）から成る系を考える。この系を真空中の一様な静電場 $\mathbf{E}$ の中に置いたとき、図 2 のように正の点電荷が負電荷の分布の中心に対して距離 d だけずれた位置で静止しているとする。また、負電荷の分布は常に一様のままであるとする。正の点電荷の位置に負電荷が作る電場を求めよ。

(4) 設問 (3) のとき、双極子モーメント $\mathbf{p} = q\mathbf{d} = \alpha\mathbf{E}$ で定義される分極率 α を求めよ。

2. 真空中に静止した原子に平面波の電磁波が入射する場合を考える。入射平面波の電場 $\mathbf{E}$ が、$E_0 e^{-i\omega t}$（i は虚数単位、ω は角周波数、t は時間）というように時間とともに変化すると、原子内で時間変化する電気双極子モーメントが誘起されて電磁放射が起こる。このような現象は電磁波の散乱と呼ばれる。

(5) 入射平面波について、単位時間に単位面積を通過するエネルギー流は、ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times (1/\mu_0)\mathbf{B}$ で与えられる。このエネルギー流の大きさの時間平均 $\langle S \rangle$ を、電場の振幅の大きさ $|E_0|$、ϵ_0、c を用いて表せ。ここで $\mathbf{B}$ は磁場、μ_0 は真空の透磁率である。

(6) 入射平面波により原子内の電子は振動運動を行う。ここでは簡単のため、電子の運動は平衡位置からのずれを x として以下の運動方程式に従うとする。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m_e} E_0 e^{-i\omega t}$$

ここで m_e は電子の質量、$e(> 0)$ は素電荷、ω_0 は系の固有角振動数である。また、電磁放射等による振動の減衰は小さいとして無視する。この運動方程式の特解が、$x = x_0 e^{-i\omega t}$ の形となることを利用して、電子の運動の振幅の大きさ $|x_0|$ を、ω の関数として示せ。

(7) 双極子から十分遠方の点（距離 $r = |\mathbf{r}|$）における電場 $\mathbf{E_s}$ と磁場 $\mathbf{B_s}$ は下のように与えられる。これらを用いて、双極子モーメント $\mathbf{p}$ の電気双極子から単位時間あたりに放射されるエネルギー W が、$W = |\ddot{\mathbf{p}}|^2/(6\pi\epsilon_0 c^3)$ と表されることを示せ。なお、$\ddot{\mathbf{p}} = d^2\mathbf{p}/dt^2$ である。
（ヒント：ベクトル公式 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$ を用いると計算が簡単になる。）

$$\mathbf{E_s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}}{c^2 r^3} \qquad \mathbf{B_s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}}{c r^2}$$

(8) 入射平面波のエネルギー流密度の時間平均と、散乱により生じた電磁波のエネルギーの時間平均との比 $\langle W \rangle / \langle S \rangle$ を散乱断面積と呼ぶ。設問 (5)、(6) の結果も用いて、$\omega \ll \omega_0$ の場合の散乱断面積を求め、古典電子半径 $a_e = e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c^2)$、$\omega$、$\omega_0$ を用いて表せ。また、散乱断面積は ω の何乗に比例するかを答えよ。

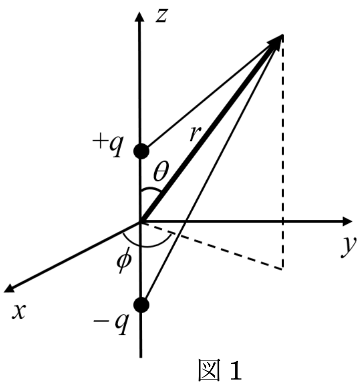


図 1

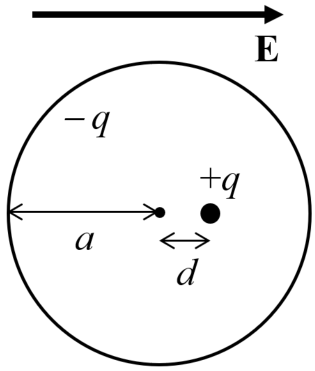


図 2

第５問

以下の設問に答えよ。

1. 電波望遠鏡では、観測したい周波数帯を選択するための同調回路が検出器に用いられている場合がある。同調回路として、図１のように抵抗、コンデンサ、コイル、電圧源が並列に接続された回路を考える。電圧源は振幅 V_{m}、角周波数 ω（$\omega > 0$）を持つ正弦波交流電圧源とする。抵抗の抵抗値を R、コンデンサの静電容量を C、コイルのインダクタンスを L としたとき、インピーダンスはそれぞれ、R、$1/(i\omega C)$、$i\omega L$ と表すことができる。ここで i は虚数単位（$i = \sqrt{-1}$）である。以下の問いに答えよ。

   (a) V_{m} を固定し、ω を変化させると回路を流れる交流電流の振幅 I_{m} が変化し、図２のように、$\omega = \omega_0$ のとき、最小値 $I_{\mathrm{m}0}$ となった。ω_0 を求めよ。

   (b) 図２のように $I_{\mathrm{m}0}$ の $\sqrt{2}$ 倍となる角周波数を ω_1、ω_2（$\omega_2 > \omega_1$）とする。$\omega_2 - \omega_1$ を求めよ。

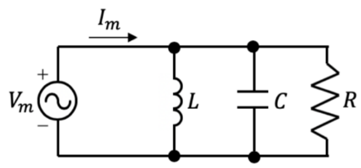


図１

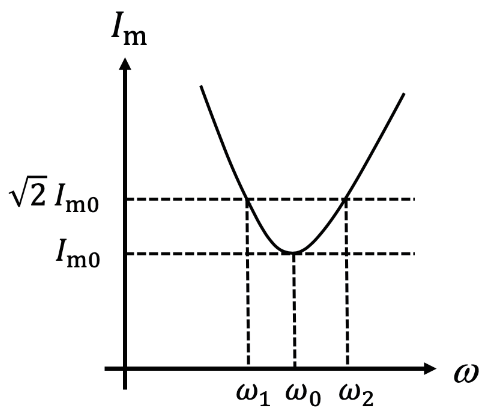


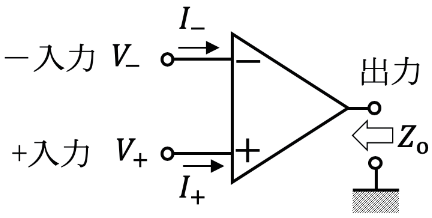
図２

2. 図３は、観測装置の電子機器でも使用される演算増幅器の回路図記号である。一般に、演算増幅器は２つの入力端子（－符号の入力端子を反転入力端子、＋符号の入力端子を非反転入力端子と呼ぶ）と１つの出力端子で構成される。理想的な演算増幅器では、図４のように出力から反転入力端子に負帰還がかかっているとき、図３に示される V_-、V_+、I_-、I_+ は、$V_- = V_+$、$I_- = 0$、$I_+ = 0$ と見なすことができる。また、出力インピーダンス $Z_{\mathrm{o}} = 0$ である。このとき、以下の問いに答えよ。

   (a) 図４の回路は正相増幅回路と呼ばれる。入力電圧を V_{in}、出力電圧を V_{out} とし、電圧利得 $V_{\mathrm{out}}/V_{\mathrm{in}}$ を、接続している抵抗の抵抗値 R_1 と R_2 を用いて表すとき、以下のア、イ、ウ、エに入る適切な記号または数式を答えよ。

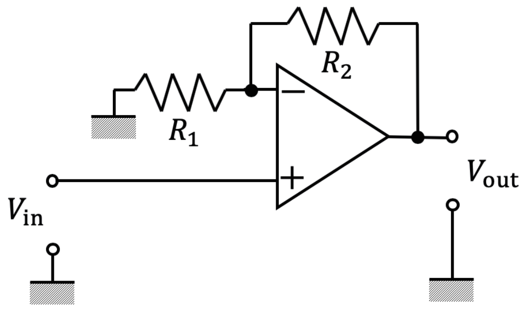
   理想的な演算増幅器の２つの入力端子は同電位であることから、反転入力端子の電圧は ＿ア＿ となり、したがって R_1 を流れる電流は＿イ＿となる。演算増幅器の２つの入力端子間には電流が流れないので、R_1 を流れる電流はすべて R_2 を流れる。このため、出力電圧 V_{out} は＿ウ＿となり、電圧利得 $V_{\mathrm{out}}/V_{\mathrm{in}}$ は＿エ＿ となる。

   (b) 光検出器として用いられるフォトダイオードと演算増幅器を用いて、光の強度を計測するための回路を図５のように考えた。フォトダイオードは光の強度に比例した電流 I_{P} を発生し、その電流を矢印の向きとする。このとき、演算増幅器１の出力電圧 V_1 を I_{P} で表せ。次に演算増幅器２の出力電圧 V_2 を I_{P} で表せ。



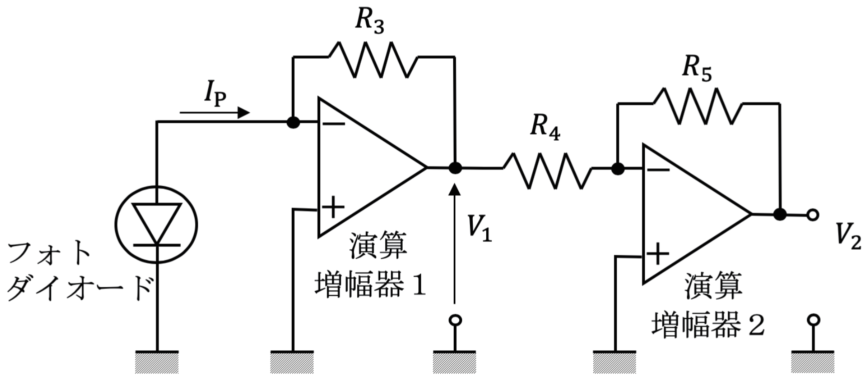
I_-
−入力 V_-
+入力 V_+
I_+
出力
Z_o

図 3



R_2
R_1
V_{in}
V_{out}

図 4



R_3
I_P
R_5
R_4
V_1
V_2
フォト
ダイオード
演算
増幅器 1
演算
増幅器 2

図 5