総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻五年一貫制博士課程
SOKENDAI (GUAS) Department of Astronomical Science
5-year doctoral program

2019年度4月入学者選抜試験
The entrance examination for April admission (FY 2019)

筆記試験（専門科目）問題
Written examination (Specialized subjects)

2018年9月5日
September 5, 2018

以下の全ての問いに解答せよ。
Answer all the following questions.

開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。
Do not open this booklet until there are instructions to do so.

解答は解答用紙に記入すること。
Answers must be placed in the answer sheets.

解答用紙とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。
All question sheets as well as the draft and answer sheets are to be collected at the end of exam. Do not forget to provide your application number at the top of all draft and answer sheets as well as the cover sheet.

受験番号(Application No.)：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名(Full Name)：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第1問

以下の問に答えよ。変数 x, y, z は実数とする。

1. ベクトル $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} - yz^2\boldsymbol{k}$ とするとき、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}$ および $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}$ を求めよ。ただし、ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は直交座標系 (x, y, z) のそれぞれの軸方向の単位ベクトルとする。

2. 関数 $y = \cot^{-1} x$ を考える ($x = \cot y \equiv \dfrac{\cos y}{\sin y}$、かつ $0 < y \leq \pi/2$ とする)。

   (a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を y の関数として求めよ。

   (b) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \sin^2 y \sin(2y)$ であることを示せ。

   (c) $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ を求めよ (n は自然数)。

3. 次の関数 $f(x, y)$ の極大値、極小値と、$f(x, y)$ がそれらの値を取る (x, y) の値を求めよ。
   $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)\exp(-x^2 - y^2)$

第2問

二次元極座標 (r, θ) で波動を表す実関数 $u(t,r,\theta)$ を考える（t は時刻）。関数 $u(t,r,\theta)$ に関する微分方程式は以下のように与えられているとする。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

ここで c は 0 でない実定数であり、また $r > 0$、$0 \leq \theta < 2\pi$ とする。この微分方程式を変数分離法によって解くことを考え、以下の設問に答えよ。

1. 変数分離を行うために、
$$u(t,r,\theta) = T(t)R(r)\Theta(\theta)$$
とおき、t に依存する成分と、r および θ に依存する成分を両辺に分離する。このとき、変数分離した微分方程式を、
$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \ldots$$
という形で求めよ。

2. 設問1で得られた式が (t, r, θ) の値によらずに成り立つためには、その式の両辺が定数に等しいことが要求される。この定数を $-\alpha$（α は正の実数とする）とおき、今度は r と θ に関する成分を両辺に変数分離した式を求めよ。

3. 設問2で得られた式が (r, θ) の値によらずに成り立つために、再び両辺が定数に等しいことが必要とされる。このとき、$\Theta(\theta)$ については、$\Theta = A\cos(n\theta)$（A, n は定数）が解となっていることを示せ。また、n は整数である必要があることを示せ。

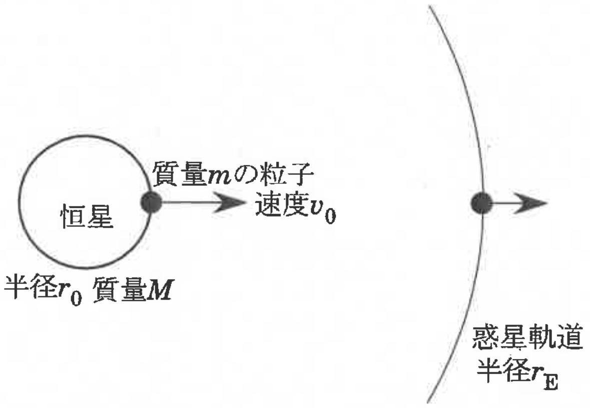
4. 以上の結果を用い、さらに設問2の定数 α を使って $x = \sqrt{\alpha}r$ として変数 r を x に置き換えたとき、$R(x)$ が満たすべき微分方程式を求めよ。

5. 次の2つの関係式を満たす関数 $J_n(x)$ が設問4で得られた微分方程式の解になっていることを示せ（n は整数とする）。

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x)$$
$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2\frac{\mathrm{d}J_n(x)}{\mathrm{d}x}$$

第3問

太陽から流出する粒子は地球にも飛来している。それを模して図に示すような、恒星（半径は r_0）の表面にある質量 m の粒子（質点としてよく、またその質量は恒星の質量 M に比べて無視できる）が動径方向に初速度 v_0 で飛び出していく、という状況を考える。またその途中で、惑星の軌道を横切って飛び去って行くことも想定する。このような粒子について以下の問に答えよ。なお、万有引力定数を G とし、また粒子の位置は恒星中心からの距離 r で表すとする。



1. 現実に太陽から流出している粒子は必ずしも大きな初速度を持つわけではないが、途中で加速されることによって、地球軌道に達しさらに無限遠方へと飛び去っていくものもある。本問題の恒星表面から出発する粒子の運動について、加速の効果を含めて以下のように論ぜよ。相対論的効果を考慮する必要はない。

   (a) まず粒子について、恒星の重力のみが作用するとして運動方程式を立て、それを解くことで、粒子が恒星を出発して恒星から離れていく間の位置と速度の関係式を得よ。

   (b) さらに、粒子には重力に加えて常に恒星から遠ざかる方向に一定の力 f ($f = ma$、a は一定で $a > 0$) がかかり続けるとして、粒子が恒星を出発して恒星から離れていく間の速度 v を位置 r の関数として表せ。

   (c) (b) の条件下で、$r > r_0$ で常に粒子の速度が $v > 0$ であれば、粒子は恒星にもどらずそのまま飛び去る。このためには、a はどれほどであればよいか、その下限値を r_0、v_0、及び定数 GM を用いて表せ。

2. 逆に、粒子の速度が大きく、恒星の重力を無視して初速度のまま等速運動をするとして構わないが、特殊相対論的効果は無視できない、という状況を考える。現実に、太陽表面で発生した高エネルギー中性子が地球に飛来することがあるが、中性子には寿命があるため、特殊相対論的効果が無視できないほどの高速でなければ途中で寿命が尽きて地球には届かない。本問題の恒星表面から出発した粒子が、粒子の固有時間で時間 T だけ経過した後に惑星軌道に到達するには、恒星から見た粒子の初速度はどれだけ必要か。光速度を c、惑星軌道 (円軌道) の半径を r_E として答えよ。

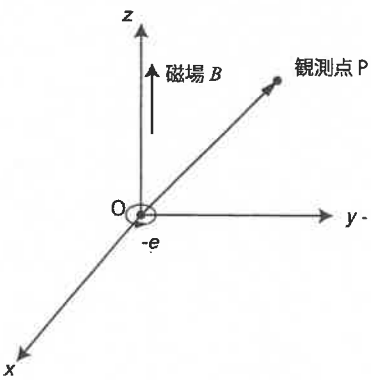
第4問

J. J. トムソンは1904年、原子は真空中に正電荷が一様に広がって分布する中に負電荷の点電子が分布するという原子模型（ぶどうパン・モデル）を提唱した。簡単な場合として、半径 a の球の内部（中心からの距離 $r \leq a$）に一様に分布した正電荷（全電荷量は $+e$）があり、その内部で点電荷 $-e$ が束縛されて運動している状態の原子モデルを考えよう。正電荷の分布は時間とともに変わらないとする。このモデルを用いて、点電荷の運動に関連した以下の問に答えよ。ただし点電荷の質量を m_e、真空の誘電率を ε_0 とし、単位系はMKSA単位系を使え。

1. 中心からの距離 r におけるこの正電荷が作る動径方向の電場 $E(r)$ を $r \leq a$ の範囲で求めよ。
2. 点電荷の運動方程式を導出し、点電荷の運動を表す解を求めよ。ただし、点電荷には、正電荷が作る静電場からの力のみが働き、点電荷は中心を通る直線上を運動し、正電荷の分布範囲内で運動すると仮定せよ。また、点電荷は時刻 $t = 0$ で $r = R_0 (< a)$ で静止していたとする。
3. 次に、点電荷が xy 平面上を円運動する場合を考える。この原子に z 軸に平行な磁束密度 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ の一様磁場をかけたとき、点電荷の運動方程式を導出せよ。また、その円運動を表す2つの独立な解を導出せよ。ただし、点電荷は、$r \leq a$ で運動するとせよ。
4. トムソンの原子モデルでは、点電荷の運動の振動数と同じ振動数を持つ輝線が原子から放射されると考えられていた。このモデルを使い、磁場が存在するときに原子の輝線が複数に分裂する（ゼーマン分裂）現象の説明が試みられた。いま図のように原点Oにある原子から放射される輝線を観測点Pで観測する。簡単のため、原子内の点電荷の運動速度は真空中の光速度 c に比べて小さく、その運動領域は原点近傍に限られるとすると、加速度運動する点電荷から放射され、時刻 t に観測点Pで観測される電磁波の電場成分は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_p, t) = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_p}\left[-\ddot{\boldsymbol{r}}_e(t_0) + \{\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_e(t_0)\}\boldsymbol{n}\right], \qquad t_0 = t - r_p/c$$

のように近似される。ただし、$\boldsymbol{r}_p$ は原点Oに対する観測点Pの位置ベクトル（$r_p \equiv |\boldsymbol{r}_p|$）、$\boldsymbol{r}_e$ は原点Oに対する点電荷の位置ベクトルで $\ddot{\boldsymbol{r}}_e$ はその時間による2階微分を表わし、t_0 は電磁波が発信された時刻である。$\boldsymbol{n}$ は点電荷から観測点に向く単位ベクトル（$\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{r}_p/r_p$）で、原子は十分に小さいので、原点から観測点に向く単位ベクトルと同じとみなせるとした。なお、電磁波の偏光の向きは電場ベクトルの向きである。このとき、ゼーマン分裂した輝線の偏光に関して、下記の問(a)、(b)に答えよ。簡単のため、点電荷は xy 面内を円運動しているとせよ。



(a) 観測点Pが z 軸上にあるときに観測される輝線の振動数を求め、輝線の偏光の特徴について述べよ。

(b) 観測点Pが y 軸上にあるときに観測される輝線の振動数を求め、輝線の偏光の特徴について述べよ。

第5問

1. 図1に理想気体による準静的な逆カルノーサイクルのいわゆるPV図を示す。圧力 P、体積 V を断熱膨張 (1–2) → 等温膨張 (2–3) → 断熱圧縮 (3–4) → 等温圧縮 (4–1) と変化させるとき、等温膨張 (2–3) の低温ステージ（温度 $T = T_{\rm L}$ とする）から等温圧縮 (4–1) の高温ステージ（温度を $T_{\rm H}$ とする）へ熱量が輸送される。状態 i における圧力、体積、温度をそれぞれ、$P_{\rm i}, V_{\rm i}, T_{\rm i}$ とし、状態方程式を $PV = nRT$ (n:モル数、R:気体定数) とする。系に熱量 ΔQ が加えられ（熱量を失った場合は負の量で表す)、内部エネルギー U と体積 V が準静的にそれぞれ ΔU、ΔV だけ微小に変化したとき、熱力学の第1法則から $\Delta Q = \Delta U + P\Delta V$ が成り立つ。

(a) 等温膨張過程 (2–3) で系が得た熱量 ($Q_{2\text{-}3}$) を求めよ。なお、等温膨張過程では、内部エネルギーの変化がゼロ（$\Delta U = 0$）である。

(b) 逆カルノーサイクルによる冷却効率を、$T_{\rm H}$ と $T_{\rm L}$ を用いて表せ。図1の断熱過程では $PV^\gamma =$ 一定 (γ は定数) であるとする。ここで γ は比熱比で $\gamma = C_P/C_V$ 、C_P と C_V はそれぞれ定圧熱容量と定積熱容量である。なお、冷却効率は次の式で定義する。$\eta = |Q_{2\text{-}3}|/(|Q_{4\text{-}1}| - |Q_{2\text{-}3}|)$、ここで $Q_{2\text{-}3}$ と $Q_{4\text{-}1}$ は図1に示す2つの等温過程で系が得た熱量である。

(c) 熱力学の第一法則から、理想気体の準静的な断熱過程では $PV^\gamma =$ 一定 であることを示せ。$C_P = C_V + nR$ としてよい。

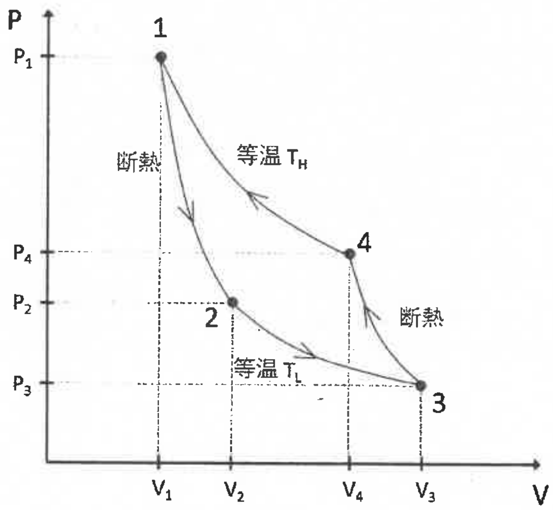


図1

2. 図 2 に絶対温度 4.2 K の液体ヘリウム (^{4}He) 1 ℓ が入る極低温冷却容器の断面図を示す。液体ヘリウムは表面積 500 cm^2 の容器に入り、さらに表面積 800 cm^2 の断熱容器内に収められて真空断熱され、熱伝導率の低い金属パイプで支えられている。金属パイプの熱伝導による室温から液体ヘリウムへの入熱は 100 mW とする。また、実験室の温度は 300 K、圧力は 1 気圧とする。解答においては、必要に応じて表 1 の物性値、および表 2 の物理定数値を用いよ。なお、数値解答については有効数字 2 桁で答えよ。

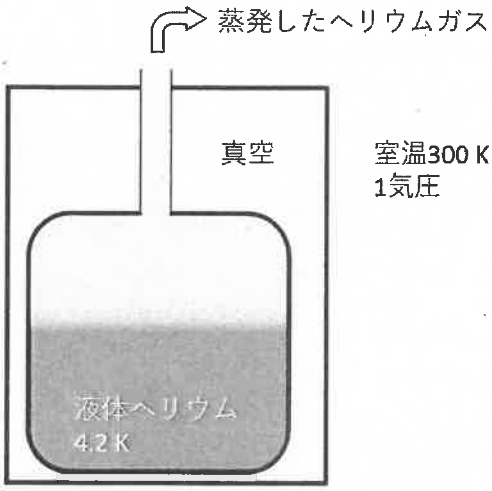


図 2

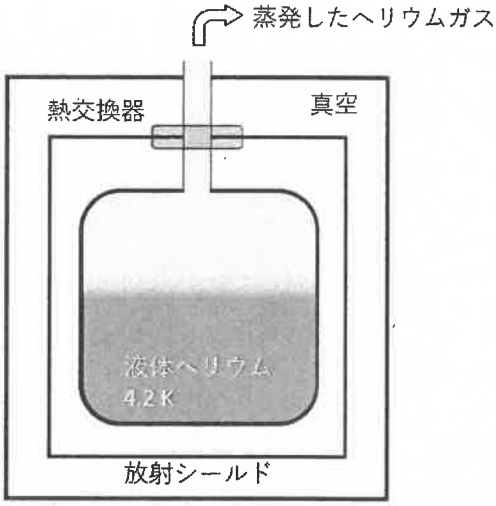


図 3

(a) 熱伝導による入熱 100 mW による液体ヘリウム 1 ℓ の保持時間（1 ℓ の液体がすべて蒸発する時間）を求めよ。

(b) 実際には、熱伝導以外にも熱放射による入熱による液体ヘリウムの蒸発を考慮しなければならない。ヘリウムの入った容器に単位時間あたりに吸収される熱放射の量は、仮に i) 断熱容器内の放射が室温の黒体放射（放射は等方と考えてよい）であり、ii) ヘリウムの入った容器は黒体で出来ている、として計算した場合の 10%であるとして、液体ヘリウム 1 ℓ の保持時間を求めよ。

(c) 図 3 に示すように、蒸発したヘリウムガスにより冷却される放射シールドを 300 K と 4.2 K の間に設けることで、室温からの熱放射を防ぎ、液体ヘリウムの保持時間を長くすることが可能である。放射シールドが受け取る熱放射を、前問 (b) で液体ヘリウムが受け取る熱放射と同量とした場合、4.2 K への入熱 100 mW による蒸発ガスで冷却される放射シールドの温度を求めよ。なお、蒸発したヘリウムガスは理想気体として扱うものとし、定圧熱容量を $C_P = 2.5nR$ (n:モル数、R:気体定数) とする。また、放射シールド自体からの熱放射は無視できると考えてよい。

表 1: 液体ヘリウム (^{4}He) の物性値

1 気圧での沸点：	4.2 K (−269 ℃)
4.2 K における密度：	0.125 g cm^{-3}
4.2 K における蒸発潜熱：	20 J/g

表 2: 物理定数値

プランク定数：	6.63×10^{-34} J s
ボルツマン定数：	1.38×10^{-23} J K^{-1}
シュテファン・ボルツマン定数：	5.67×10^{-8} W m^{-2} K^{-4}
気体定数 (R)：	8.31 J K^{-1} mol^{-1}

第3問

設問1 (c) に以下の訂正。

【誤】r_0、v_0、及び定数 GM

【正】r_0、v_0、G、M

第4問

設問3の問題文は以下のものに差し替え。

3. さらに、磁場の影響も受けて、点電荷が xy 平面上を運動する場合を考える。この原子に z 軸に平行な磁束密度 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ の一様磁場をかけたとき、点電荷の運動方程式を導出せよ。また、点電荷が円運動をする場合の、2つの独立な解を求めよ。ただし、点電荷は、$r \leq a$ で運動するとせよ。