# 総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻

# 五年一貫制博士課程
# 平成 30 年度 4 月入学に係る筆記試験（専門科目）問題

（2017 年 8 月 23 日 13 時 00 分～16 時 00 分）

# SOKENDAI (GUAS) Department of Astronomical Science
# 5-year doctoral program

## The entrance examination for April admittance (FY 2018)

## Written examination (Specialized subjects)

※開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。

Do not open this booklet until instructed at the time of commencement of the examination.

以下の第１問から第５問までの５問全てに解答せよ。

解答とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。

Answer the following questions. All question sheets as well as the draft and answer sheets are to be collected at the end of exam. Do not forget to provide your application number at the top of all draft and answer sheets as well as the cover sheet.

受験番号(Application No.)：____________________　氏名(Full Name)：____________________

$\boxed{\text{第 1 問}}$

次の積分結果を証明せよ。ただし n は正の整数、$a > 0$、$\lambda$ は実数とする。

1.
$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

2.
$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{n!}{2}$$

3.
$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

4.
$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

5.
$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos\lambda x dx = \frac{a}{a^2 + \lambda^2}, \int_0^\infty e^{-ax} \sin\lambda x dx = \frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2}$$

$\boxed{\text{第 2 問}}$

座標原点を O とする直交座標系 $(x, y, z)$ において、次に定義するベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を考える。

$$\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} + (y+z)\boldsymbol{j} + (z+x)\boldsymbol{k}$$

ここで、$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ $x, y, z$ 軸の正方向の単位ベクトルであり、ベクトル積を $\times$ と書くとき $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}$ が成り立つものとする。

また、平面 P: $2x + y + z = 2$ と、それが $x$ 軸,$y$ 軸,$z$ 軸と交わる点をそれぞれ A,B,C とし、三角錐 OABC を立体 V、三角形 ABC を面 S、および、三角形 ABC の辺上を A → B → C → A と一周する閉経路を経路 L とする。このとき、以下の設問に答えよ。なお、微分演算子 $\nabla$ は

$$\nabla = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

で定義されるものとする。

1. ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ について以下を求めよ。
   - (a) $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$
   - (b) $\nabla \times \boldsymbol{F}$
2. 平面 P と点 A,B,C について以下を求めよ。
   - (a) 平面 P の単位法線ベクトル
   - (b) 点 A,B,C それぞれの座標
3. 以下の積分を計算せよ。ただし、答えだけではなく途中経過も示すこと。
   - (a) 立体 V についての体積分
     $$\iiint_{\mathrm{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) \mathrm{d}V.$$
     ここで $\mathrm{d}V$ は立体 V の体積素片である。
   - (b) 面 S についての面積分
     $$\iint_{\mathrm{S}} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S.$$
     ここで $\mathrm{d}S$ は面 S の面積素片である。なお、$\boldsymbol{n}$ は面 S の単位法線ベクトルで、その向きは立体 V に対して外向きとする。
   - (c) 経路 L についての線積分
     $$\int_{\mathrm{L}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$
     ここで $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ は経路 L の線素ベクトルである。

第 3 問

剛体の運動は重心の運動と重心まわりの回転運動に分けて記述することができる。以下ではベクトルを太字で表すものとする。まず、質量 $M$ の剛体の重心 **G** の位置ベクトルを $\mathbf{x}_G$ と表す。次に、剛体には外力 $\mathbf{F}_i$ ($i = 1, 2, \ldots$) が働いており、$\mathbf{F}_i$ が作用する点の重心に対する相対位置ベクトルを $\mathbf{r}_i$ と書く (図 1)。このとき、重心の運動方程式は

$$M\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_G}{\mathrm{d}t^2} = \sum_i \mathbf{F}_i \tag{1}$$

である。一方、重心まわりの回転運動は角運動量 $\mathbf{L}$ を用いて回転運動の式

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \tag{2}$$

として表すことができる。ここで剛体が $z$ 軸のまわりに角速度 $\omega$ で回転している場合には、$z$ 軸まわりの角運動量 $L_z$ は、$\omega$ と $z$ 軸まわりの剛体の慣性モーメントの積である。

$$L_z = I_z\,\omega \tag{3}$$

ただし $I_z$ は剛体内部の要素 (質量は $\mathrm{d}m$、$z$ 軸からの距離は $s$) の積分として、

$$I_z = \int s^2\,\mathrm{d}m \tag{4}$$

と書き表される。

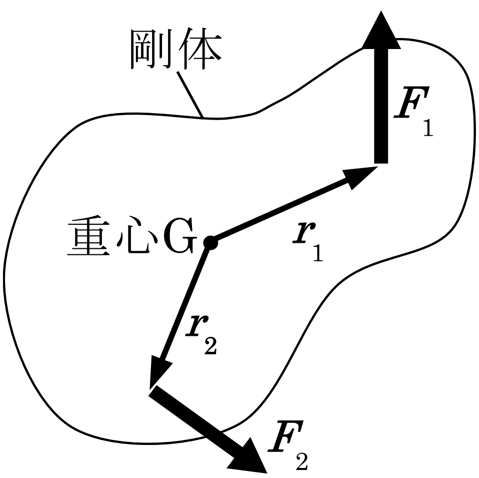


図 1: 剛体にはらたく外力のモーメント。$i = 1$ と $2$ についてのみ例示した。

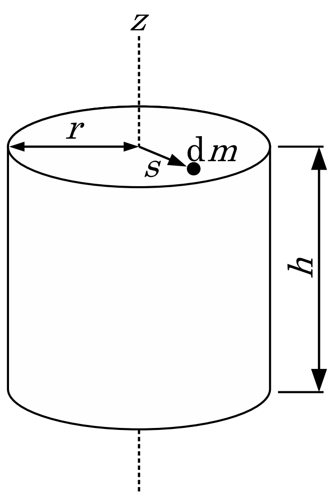


図 2: 半径 $r$、高さ $h$ の直円柱。

1. 密度 $\rho$ が一定の直円柱 (半径 $r$、高さ $h$) (図 2) の中心軸まわりの慣性モーメントは、直円柱の質量 $M$ と半径 $r$ を使って

$$I_z = \frac{1}{2}\,M\,r^2 \tag{5}$$

と表されることを示せ。

2. この密度一様の直円柱 (質量 $M$、半径 $r$) が粗い斜面 (角度 $\theta$) を滑らずにまっすぐ転がり落ちる。斜面に平行な方向の重心の運動方程式と、重心まわりの回転の運動方程式をそれぞれ書き表せ。重力加速度を $g$ とし、直円柱と斜面の間に働く摩擦力の大きさを $R$ とする (図 3)。

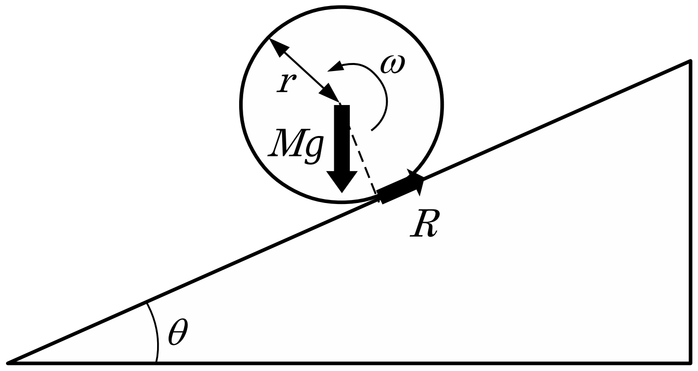


図 3: 粗い斜面を滑らずにまっすぐ転がり落ちる直円柱に働く力。

3. 全く摩擦が働かずに、直円柱が同じ斜面をまっすぐ滑り落ちる場合には、重心 G が斜面に平行に移動する加速度は $g\sin\theta$ となる。上の問題のように、剛体が斜面を転がり落ちる場合の加速度を求めよ。この 2 つの加速度は異なるが、その違いはどうして生じるか。位置エネルギーが運動エネルギーにどのように変換されるかを比べて説明せよ。

第 4 問

高温の炉の中で銀を蒸発させ、その原子 (質量 $m$) を図 4 のように円筒状のコリメーターを通して取り出し、コリメーター方向の速度 $v$ の原子線を作る。コリメータの長さは、その半径に比べ十分長いものとする。原子線がコリメーターの出口から距離 $L$ だけ走って、スクリーンに当たるものとする。コリメーターの軸に垂直な方向を $r$ 方向とし、コリメーターの半径を $\Delta r$ とする。運動量の $r$ 成分の不定性を $\Delta p$ としたときに、次の問に答えよ。

1. スクリーン上でのスポットの広がり $\delta$ を $\Delta r$, $\Delta p$ を含む式で表しなさい。

2. 銀原子の位置の不定性は、コリメーターの半径 $\Delta r$ 程度であるとする。量子力学の不確定性原理から $\Delta r \Delta p \gtrsim \hbar$ とするとき、$\delta$ の最小値 $\delta_{\min}$ を求めなさい。ただし、プランク定数 $h$ を $2\pi$ で割ったものを $\hbar$ とする。

3. 炉の温度を $T$ としたときの $\delta_{\min}$ を求めよ。

4. 炉の温度 $T = 1400$ **K**、コリメーターの出口からスクリーンまでの距離を $L = 1.0$ **m**、銀 1 原子の質量を $m = 1.8 \times 10^{-25}$ **kg** としたとき、$\delta_{\min}$ を計算せよ。ただし、銀の蒸気は単原子分子の理想気体とし、$\hbar = 1.0 \times 10^{-34}$ **J·s**、ボルツマン定数 $k = 1.4 \times 10^{-23}$ **J/K** とする。なお、解答は有効数字 1 桁まで示せばよい。

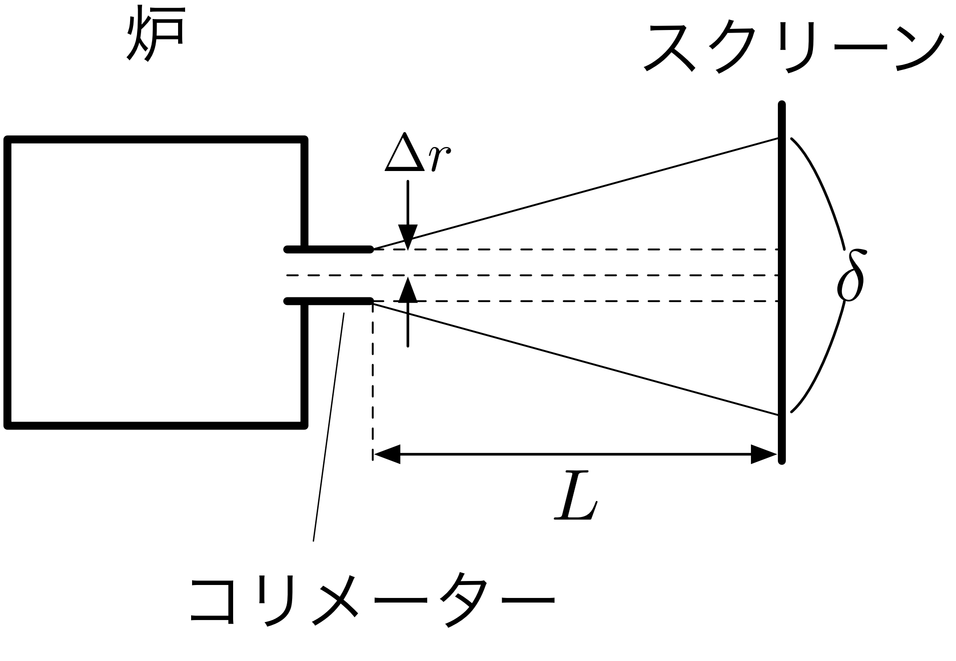


図 4: 高温の炉、コリメーター、スクリーンの配置。

第 5 問

円電流により作られる磁界について以下の設問に答えよ。

1. 図 5 に示すように大きさ $I$ の円電流 (半径を $a$ とする) が $xy$ 面上にあるとき、円の中心軸上 $z$ に発生する磁界 $H(z)$ が次式で表されることを示せ。参考のため、図 6 にビオ・サバールの法則の概念図と式を示す。

$$H(z) = \frac{Ia^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{6}$$

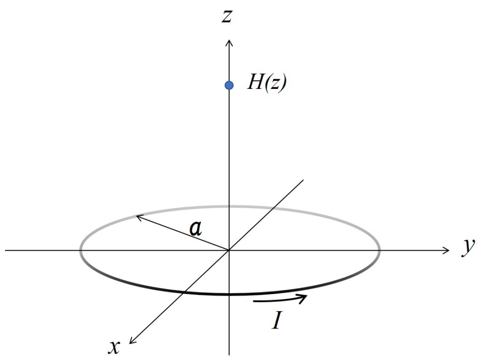


図 5: 大きさ $I$ の円電流 (半径を $a$ とする)。

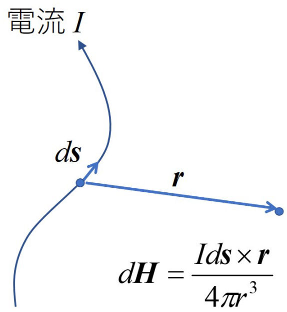


図 6: ビオ・サバールの法則。電流素片 $I\,d\mathbf{s}$ により発生する微小磁界の式を示す。

2. 図 7 に示すように、同じ大きさ、同じ向きの 2 つの円電流 (半径を $a$ とする) が $xy$ 平面と平行に $z$ 軸上原点から $\pm b$ 離れたところにある。原点近傍の $z$ 軸上においてゼロでないできるだけ一様な磁界を発生させるために必要な条件を、式やグラフを用いて具体的に説明せよ。

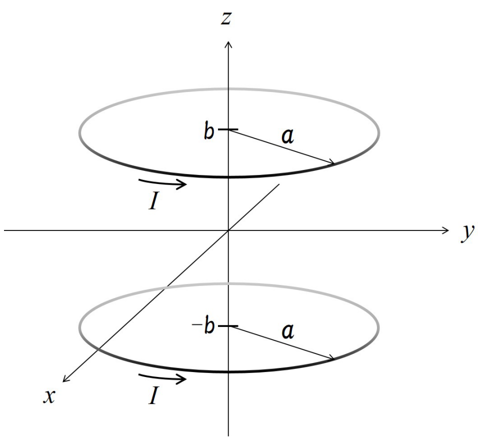


図 7: 同じ大きさ、同じ向きの 2 つの円電流が $z$ 軸上原点から $\pm b$ 離れたところにある。