総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻

五年一貫制博士課程
平成 29 年度 4 月入学に係る筆記試験（専門科目）問題

（2016 年 8 月 24 日 13 時 00 分～16 時 00 分）

SOKENDAI (GUAS) Department of Astronomical Science
5-year doctoral program

The entrance examination for April admittance (FY 2017)

Written examination (Specialized subjects)

※開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。

Do not open this booklet until instructed at the time of commencement of the examination.

以下の第１問から第５問までの５問全てに解答せよ。
解答とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。

Answer the following questions. All question sheets as well as the draft and answer sheets are to be collected at the end of exam. Do not forget to provide your application number at the top of all draft and answer sheets as well as the cover sheet.

受験番号(Application No.)：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名(Full Name)：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\text{第 1 問}}$

1. 以下の関数を $x = 0$ の周りでテイラー展開し、無限級数として Σ 記号を用いて表せ。

   (a) $\sin x$

   (b) $\cos x$

2. 次の方程式について以下の設問に答えよ。ただし ω は 0 でない実定数とする。

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y = 0 \tag{1}$$

   (a) $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ という t のべき級数を代入して a_n の満たすべき漸化式を求めよ。

   (b) さらに、1. の結果を参考にして y を三角関数を用いた式で表せ。

第 2 問

1. X という量を観測し、$Z = f(X)$ なる関数を用いて Z という量を求める場合について考える。X の観測は独立に n 回行われていて、観測値は $x_i\,(i = 1, \cdots, n)$、その平均値は $\bar{x}$、平均値と各観測値の差が $\varepsilon_{x_i}\,(= x_i - \bar{x})$ である。
このとき、以下の設問に回答せよ。ただし、次の条件を適用すること: **1)** $f(X)$ は無限回微分可能である、**2)** ε_{x_i} は十分に小さく、**2** 次以上の高次項は低次項に対して無視できる。

   (a) $z_i = f(x_i)$ であり、それらの平均値が $\bar{z}$ であるとき、$\varepsilon_{z_i}\,(= z_i - \bar{z})$ について次の近似が成り立つことを示せ。

$$\varepsilon_{z_i} = \varepsilon_{x_i} \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}\right|_{X=\bar{x}} \tag{1}$$

   (b) X の標本分散 (以後「分散」という) が $\sigma_X^2\,(= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{x_i}^2)$ であるとき、Z の分散 σ_Z^2 について次の近似が成り立つことを示せ。

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 \left(\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}\right|_{X=\bar{x}} \right)^2 \tag{2}$$

   (c) 以下のような $Z = f(X)$ の場合について Z の分散 σ_Z^2 を求めよ。ただし、X の平均と分散はそれぞれ $\bar{x}$ と σ_X^2 であるとする。

      i. $f(X) = a\cos X$ (a は定数、$a \neq 0$)

      ii. $f(X) = \log_{10} X$ ($X > 0$)

2. X、Y という二つの量の組を独立に n 回観測し、$Z = f(X, Y)$ なる関数を用いて Z という量を求める場合について考える。X の各観測値を $x_i\,(i = 1, \cdots, n)$、X の観測値の平均値 $\bar{x}$ と x_i の差を $\varepsilon_{x_i}\,(i = 1, \cdots, n)$ とする。同様に、Y の各観測値を $y_i\,(i = 1, \cdots, n)$、Y の観測値の平均値 $\bar{y}$ と y_i の差を $\varepsilon_{y_i}\,(i = 1, \cdots, n)$ とする。
このとき、以下の設問に回答せよ。ただし、次の条件を適用すること: **1)** $f(X, Y)$ は変数 X、Y それぞれに対して無限回微分可能である、**2)** ε_{x_i} と ε_{y_i} の間には相関は無い、**3)** ε_{x_i}、ε_{y_i} は十分に小さく、ε_{x_i}、ε_{y_i} の **2** 次以上の高次項は低次項に対して無視できる。

   (a) $z_i = f(x_i, y_i)$ であり、それらの平均値が $\bar{z}$ であるとき、$\varepsilon_{z_i}\,(= z_i - \bar{z})$ を ε_{x_i}、ε_{y_i} および f の偏導関数を用いて書き表せ。

   (b) (a) の結果にもとづいて、Z の分散 σ_Z^2 を X の分散 σ_X^2、Y の分散 σ_Y^2 および f の偏導関数を用いて書き表せ。

   (c) 以下のような $Z = f(X, Y)$ の場合に Z の分散 σ_Z^2 を求めよ。ただし、X、Y の平均はそれぞれ $\bar{x}$、$\bar{y}$、分散はそれぞれ σ_X^2、σ_Y^2 であるとする。

      i. $f(X, Y) = aX - bY$ (a、b は定数、$a \neq 0$、$b \neq 0$)

      ii. $f(X, Y) = X/Y$ ($Y \neq 0$)

第3問

下図に示すように、密度が一様で質量 M、半径 a の球体 Q が原点 O に固定されている。このとき、微小質量 m をもった質点 P の運動を考える。なお、質点 P は球体の内外を重力以外の力を受けることなく自由に運動できるものとする。重力定数を G とする。

以下の設問に答えよ。

1. Q のつくる重力ポテンシャル $U(R)$ が、中心からの距離 R の関数で次のように表されることを示せ。

(a)

$$U(R) = -G\frac{M}{R} \quad (R > a) \tag{1}$$

(b)

$$U(R) = -G\frac{M}{a}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{R^2}{a^2}\right) \quad (0 < R \leq a) \tag{2}$$

2. 質点 P が受ける力を求めよ。

3. 質点 P を球体内の、球体の中心 O から距離 $b\,(>0)$ の位置に初速度 0 で置いた。運動方程式を解いて、その後の質点 P の運動を示せ。さらに、質点 P の運動の周期を求めよ。

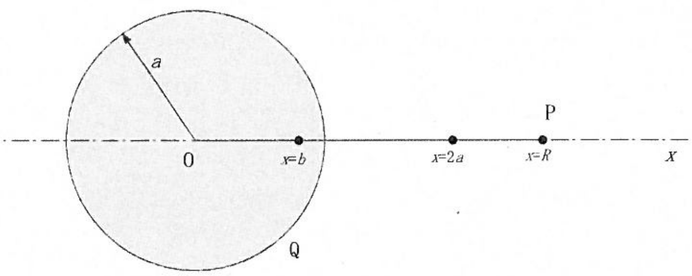
4. 質点 P を原点 O から距離 $2a$ の位置に初速度 0 で置いた。その後の質点 P の運動を考える。

   (a) 質点 P が球体の表面に到達したときの速さを求めよ。

   (b) 質点 P の球体内部での運動を運動方程式を解くことによって求め、その結果を式を用いて示せ。また、質点 P が球体内部に入ってから抜けるまでの時間を求めよ。

   (c) 質点 P の運動について、その時間と位置の関係を解答用紙の指定された場所にグラフとして描け。

   (d) 質点 P の運動の周期を求めよ。



第 4 問

無限に長い 2 つの円管状の導体 C_1 と C_2 を、真空中に、z 軸を共通の中心軸として図 1 のように配置する。それぞれの半径を r_1、r_2 とし、$r_1 < r_2$ とするとき、以下の設問に答えよ。また、本問では国際単位系 (SI) を用いる。なお、真空中でのマクスウェルの方程式は、

$$\epsilon_o \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_o \boldsymbol{j} + \epsilon_o \mu_o \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4}$$

と表される。ここで、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ は電場と磁束密度、$\boldsymbol{\nabla}$ は座標 (x, y, z) を持つ三次元デカルト座標空間における成分が $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ となる演算子、ϵ_o、μ_o はそれぞれ真空の誘電率と透磁率、ρ、$\boldsymbol{j}$ はそれぞれ電荷の (体積) 密度と電流密度である。

1. C_1 に正電荷が、C_2 に負電荷が一様に分布し、それぞれの電荷密度は z 軸に沿った単位長さあたり $+\sigma$ と $-\sigma$ であるとする。

   (a) z 軸から距離 $r\,(r_1 < r < r_2)$ 離れた位置の電場 $\boldsymbol{E}$ の大きさを求めよ。またその向きを x-y 面内に図示せよ。

   (b) C_2 に対する C_1 の電位 V を求めよ。

2. C_1 には $+z$ 向きに、C_2 には $-z$ 向きに一様な定電流 I が流れているとする。

   (a) z 軸から距離 $r\,(r_1 < r < r_2)$ 離れた位置の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさを求めよ。またその向きを x-y 面内に図示せよ。

   (b) C_1 と C_2 をつなぐ面 S (図 2 の網掛け部) を貫く磁束 ϕ を求めよ。ただし、z 軸方向の幅は単位長さとする。

3. C_1 を流れる交流電流が位置 z と時刻 t の関数として、

$$I(z, t) = I_0 \sin(\omega t - kz)$$

   と表されるとする。ただし、$+z$ 方向に流れる電流を正とし、I_0、ω、k は正の定数である。一方、C_2 を流れる交流電流は $-I(z, t)$ であるとする。

   (a) 電荷が保存されることを使って C_1 に現れる電荷密度 $\sigma(z, t)$ を求めよ。ただし総電荷は 0 とする。

   (b) $k/\omega = \sqrt{\epsilon_o \mu_o}$ であることを示せ。

   (c) C_2 に対する C_1 の電位 $V(z, t)$ と $I(z, t)$ の比は、z, t によらない定数になる。その定数を求めよ。

図1

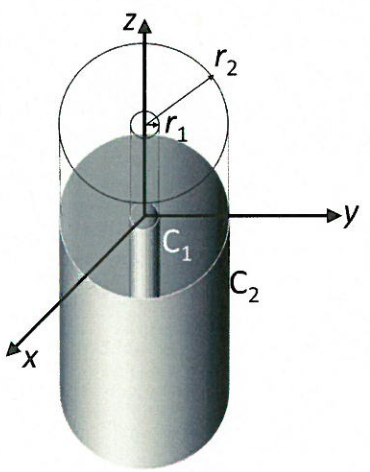
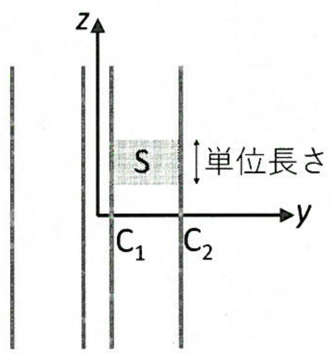


図2
Y-Z断面



第５問

正電荷 $+Ze$（Z は原子番号）の原子核の周りを負電荷 $-e$ の電子１個が回っている水素類似原子を考える。原子核の質量は電子の質量 (m) より十分重くて反作用の運動は無視できるとしよう。原子核を原点に取った電子の位置ベクトルを $\vec{r}$、運動量ベクトルを $\vec{p}$ とすると、ハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{2m}|\vec{p}|^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{|\vec{r}|} \tag{1}$$

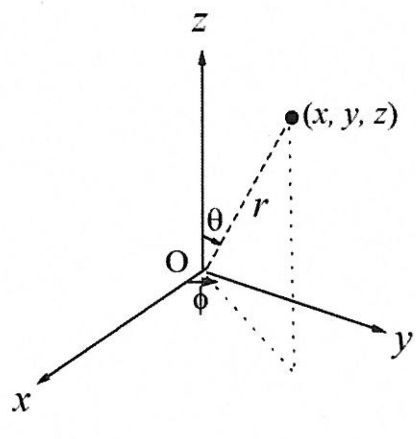
と表される。ここでクーロンポテンシャルは国際単位系 (SI) での表式を用いた (ϵ_0 は真空の誘電率)。この系の電子状態や対応するエネルギーを調べるには、シュレーディンガーの波動方程式を解いて電子のふるまいを記述する波動関数 ψ を求める必要がある。今の場合解くべき方程式は、(1) のハミルトニアン H の位置と運動量を対応する演算子で表した後に ψ に作用させて、

$$H\psi = E\psi \tag{2}$$

として導かれる微分方程式である (E はエネルギーで、固有値として決めるべき数値)。
以下の各問いに答えよ。

1. 原子核を原点に取った三次元直交座標系 (x、y、z) における微分方程式 (2) を示せ。
2. 方程式 (2) について、原子核を原点に取った三次元極座標系 (r、θ、ϕ) で考えよう。水素類似原子では様々な状態に対応する波動関数が存在するが、最も単純な角運動量がゼロ ($l = 0$) の s 状態の波動関数 (ψ_s) は方向 (θ、ϕ) には依存せずに動径距離 (r) のみの関数となる。$\psi_s(r)$ が従う微分方程式を導け。なお物理定数としては、プランク定数 h を 2π で割った換算プランク定数 $\hbar(\equiv \frac{h}{2\pi})$ を用いること。
3. 以下では、s 状態の中でも最もエネルギーが低い基底状態 ($1s$ 状態) の場合を考えることにする。このときの波動関数は $\psi_{1s}(r) = K\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$ と簡単な指数関数で表される (a は定数、K は規格化のための比例定数)。定数 a を m、$\hbar$、Z、e、ϵ_0 を用いて表せ。またエネルギー E を m、$\hbar$、Z、e、ϵ_0 を用いて表せ。
4. この $1s$ 状態で 電子が 区間 $[r, r+dr]$ にある確率が $P(r)dr$ であるとする。$P(r)$ の具体的な表式を求めよ。但し $\int_0^\infty P(r)dr = 1$ と規格化し、定数 a はそのまま用いること。
5. $1s$ 状態で電子を見いだす確率 $P(r)$ が最大になる半径、$r_{p\max}$、並びに、電子と原子核の間の平均距離 $\langle r\rangle$ (すなわち r の値の期待値) をそれぞれ定数 a を用いて表せ。

[参考: 三次元直交座標系と三次元極座標系]



三次元直交座標 (x, y, z) と三次元極座標 (r, θ, ϕ) の関係
$x = r\sin\theta\cos\phi$
$y = r\sin\theta\sin\phi$
$z = r\cos\theta$
$(0 \le r < \infty, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi)$.

直交座標系のラプラス演算子は
$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
極座標系のラプラス演算子は
$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$