総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻

五年一貫制博士課程
平成28年度4月入学に係る筆記試験（専門科目）問題

(2015年8月26日 13時00分～16時00分)

SOKENDAI (GUAS) Department of Astronomical Science
5-year doctoral program

The entrance examination for April admittance (FY 2016)

Written examination (Specialized subjects)

※開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。
Do not open this booklet until instructed at the time of commencement of the examination.

以下の第１問から第５問までの５問全てに解答せよ。
解答用紙は各問題２枚ずつある。解答とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。
Answer the following questions. Use two answer sheets for each question as indicated. All question sheets as well as the draft and answer sheets are to be collected at the end of exam. Do not forget to provide your application number at the top of all draft and answer sheets as well as the cover sheet.

受験番号(Application No.)：______________ 氏名(Full Name)：______________

第１問

サイコロを振って実験を行った。以下の設問に答えよ。

(i) どの目の出る確率も等しいサイコロを理想サイコロと呼ぶ。理想サイコロを振ったとき、出る目の期待値を求めよ。

(ii) 理想サイコロを N 回振ったとき、1 か 6 の目が出る回数が m となる確率 $W(N,m)$ を求めよ。

(iii) サイコロを N 回振ったときに出た目の総和を S_N とする。理想サイコロの S_N の平均値と分散を求めよ。

(iv) あるサイコロを 300 回振ったところ、出た目の回数が、それぞれ、33、48、64、57、52、46 回であった。標準正規分布に従う互いに独立な n 個の確率変数の二乗の和（χ^2 という）は、自由度 n の χ^2 分布に従う。これを利用して、このサイコロが理想サイコロと言えるかを検定する。

(a) 出た目の χ^2 を求めよ。

(b) このサイコロは理想サイコロと言えるか。下表を用いて検定せよ。

表：自由度 n の χ^2 分布における α と u の関係 $\left(\int_u^\infty \chi^2(x)\mathrm{d}x = \alpha\right)$

n \ α	0.99	0.98	0.95	0.90	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.0001	0.0006	0.0039	0.0157	2.7055	3.8414	5.4118	6.6349
2	0.0201	0.0404	0.1025	0.2107	4.6051	5.9914	7.8240	9.2103
3	0.1148	0.1848	0.3518	0.5843	6.2513	7.8147	9.8374	11.3448
4	0.2971	0.4294	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.6678	13.2767
5	0.5543	0.7518	1.1454	1.6103	9.2363	11.0705	13.3882	15.0862
6	0.8720	1.1344	1.6353	2.2041	10.6446	12.5915	15.0332	16.8118

第2問

次の微分方程式によって記述される物理現象を考える。

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = bF - F^n \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}(ZF)}{\mathrm{d}t} = (a - Z)\,F^n \tag{2}$$

ここに $F(t)$, $Z(t)$ は時間 $t\ (\geq 0)$ の関数であり、$F(0) = 1$, $Z(0) = 0$ である。また、n, a, b は定数であり、$n > 0,\ a > 0,\ 0 \leq b < 1$ である。この時、以下の (i)–(iii) の場合について式 (1), (2) を解いて F, Z をそれぞれ t の関数として表せ。また各々について、Z と F の表式から t を消去し、Z と F の関係を示せ。

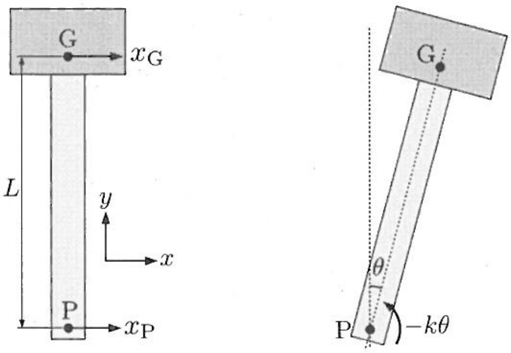
(i) $n = 1, b = 0$

(ii) $n = 1, b \neq 0$

(iii) $n = 2, b \neq 0$

第3問

下図に示すような二次元平面内で運動する倒立振り子を考える。この振り子は細長い脚部と先端に取り付けられた重り部分からなり、支点Pを中心にして回転する。振り子全体の重心をGとし、GとPの間の距離をLとする。また、振り子全体の質量をm, 重心Gを中心とした慣性モーメントをIとする。支点Pにはねじれバネが組み込まれており、振り子が直立状態から回転すると、回転角θに比例した復元トルク$-k\theta$がP点に加わる。ここで、kはねじれバネのバネ係数である。また、この系には$-y$方向に重力がかかっており、重力加速度をgとする。重心Gのx方向の変位をx_{G}、支点Pのx方向の変位をx_{P}と表す。支点Pを水平方向に強制振動させた際に、重心Gへどれだけ振動が伝わるかを考える。以下の設問に答えよ。



(i) この倒立振り子の運動方程式は以下で与えられるものとする。

$$m_{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}^2x_{\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t^2}-I_{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}^2x_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}t^2}+k_{\mathrm{e}}\left(x_{\mathrm{G}}-x_{\mathrm{P}}\right)=0$$

ただし、

$$m_{\mathrm{e}}\equiv m+\frac{I}{L^2},\qquad I_{\mathrm{e}}\equiv\frac{I}{L^2},\qquad k_{\mathrm{e}}\equiv\frac{k}{L^2}-\frac{mg}{L}$$

であり、$k_{\mathrm{e}}\geq 0$が満たされているものとする。$x_{\mathrm{G}}(t)$と$x_{\mathrm{P}}(t)$をそれぞれ以下のようにフーリエ変換の形に表す。

$$x_{\mathrm{G}}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}_{\mathrm{G}}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad x_{\mathrm{P}}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}_{\mathrm{P}}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

これを運動方程式に代入し、$T(\omega)\equiv\hat{x}_{\mathrm{G}}(\omega)/\hat{x}_{\mathrm{P}}(\omega)$を求めよ。

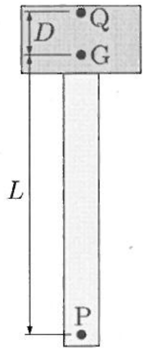
(ii) $T(\omega)$は、各周波数ωで支点Pの振動が重心Gにどれだけ伝わるかを表し、伝達関数と呼ばれる。特にTの絶対値が1より小さい場合、振動が減衰されるため、この系は防振装置として働く。Tの絶対値が、以下の周波数領域でどのような振る舞いをするか、概要を述べよ。

(a) $\omega^2\ll\dfrac{k_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}}$

(b) $\dfrac{k_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}}\ll\omega^2\ll\dfrac{k_{\mathrm{e}}}{I_{\mathrm{e}}}$

(c) $\dfrac{k_{\mathrm{e}}}{I_{\mathrm{e}}}\ll\omega^2$

(iii) 上記(c)から、$\omega\to\infty$でもTはゼロにはならないことがわかる。防振装置としての性能を高めるため、Tがゼロに近づくような方法を考えたい。そこで、重心GよりもDだけ高い点Qに、防振対象の装置を取り付ける(下図参照)。Q点の水平方向の変位をx_{Q}とした時、$\omega\to\infty$で$\hat{x}_{\mathrm{Q}}(\omega)/\hat{x}_{\mathrm{P}}(\omega)$がゼロになるために必要な$D$を求めよ。ただし、$\hat{x}_{\mathrm{Q}}(\omega)$は、$x_{\mathrm{Q}}(t)$のフーリエ変換である。



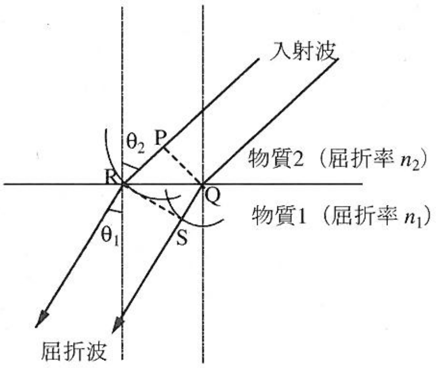
(iv) 上記 (iii) において、I がゼロの場合、Q と G は一致する ($D = 0$)。一方、I が無視できない場合、D は正の値になる。この理由を数式を使わずに、物理的考察から説明せよ。

第４問

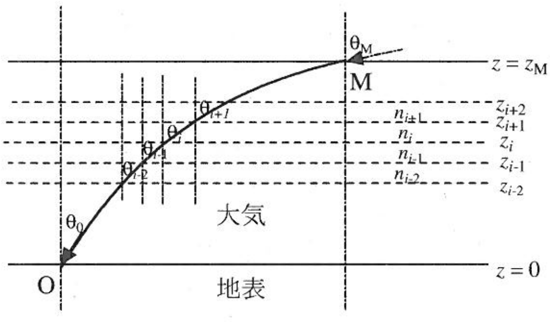
以下の設問に答えよ。

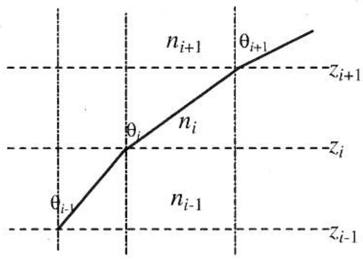
(i) 振動数 ν の単色光が真空 (屈折率 1) から屈折率 n (>1) の物質に入射する場合を考える。物質中での光の速度 c' は (真空中の光速度を c として) $c' = c/n$ となるが、その波長 λ' 並びに振動数 ν' はそれぞれどうなるか。c, ν, n を適宜用いて書き表せ。

(ii) 次の図は屈折率 n_2 の物質 2 から屈折率 n_1 の物質 1 ($n_2 < n_1$) に単色光の平面波が入射して屈折され、入射角が θ_2 で屈折角が θ_1 になっている様子を表している。この図を基にして、ホイヘンスの原理からスネルの法則「$n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1$」が導かれることを示せ。ただしホイヘンスの原理とは「ある時刻における波面上の全ての点は新しい波源となって次の波面が作られるが、最終的な波面は全ての点から出た波の包絡面となる」と書き表される原理である。



(iii) 下の図のように遠方の天体からやってきた単色光が大気上部境界の点 M において入射角 θ_M (天頂方向の鉛直線を基準に測る) で入射し、大気で屈折して地上の観測者 O に角度 θ_0 で観測される場合を考える。大気の屈折率 (n) は高さ (z) に関して $n = 1 + k\exp(-z/H)$ という関数 (k, H は定数) で表せると仮定したとき、$\theta_M, \theta_0, k, H, z_M$ の間に成立する関係式を求めよ。なお地球の曲率は無視できて地球大気は多数の薄い平面層で構成されるとみなすことができるものとする。





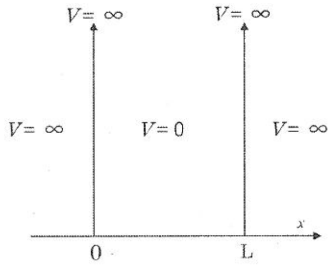
(iv) 実際の入射角と見かけの入射角の差 $\delta (\equiv \theta_M - \theta_0)$ を大気差という。形式的に $z_M \to \infty$ と置いても実際上十分正しい結果が得られる (この場合は結果は H に無関係になる) ことを利用して、地上で観測された θ_0 が 45 度であった場合の大気差の値 δ を求めよ。但し k としては $k = 3 \times 10^{-4}$(地上の大気の屈折率に対応) を用いて δ の値は角度の分 (1 分=1/60 度) を単位として有効数字 1 桁で表せ。

第5問

以下のヒントを使って設問に答えよ。

ヒント：$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda x^2)dx = \sqrt{\pi/\lambda}$, $\hbar^2/m_e \approx 7.62 \times 10^{-2}$ **eV nm**^{2}, $hc \approx 1.24 \times 10^3$ **eV nm**, $\sqrt{\pi} \approx 1.77$, $\pi^2 \approx 9.87$. ただし m_e は電子の質量、**eV** はエレクトロンボルト、**nm** はナノメートルである。

(i) 1次元の無限に深い井戸型ポテンシャル内に電子がある場合を考える。ポテンシャル V は井戸の中では0であり、外では無限大である。井戸の幅は L とする。



このとき量子数 n の波動関数が

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ 0 \le x \le L)$$

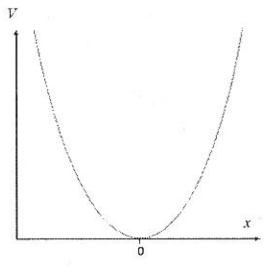
と表せることを導け。

(ii) 今、上記 (i) の1次元の井戸型ポテンシャル内にある電子は基底状態にあり、この電子が吸収できる光の最も長い波長を **100 nm**（ナノメートル）とする。この井戸型ポテンシャルの幅 L が

$$L \approx 0.30 \text{ nm}$$

となることを示せ。

(iii) 次に電子が1次元の調和振動子型ポテンシャル内にある場合を考える。



このとき量子数 n の波動関数は

$$\psi_n(x) = C_n H_n(x) \exp\left(-\frac{m_e \omega}{2\hbar} x^2\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

で表せる。ここで C_n は規格化定数、$H_n(x)$ はエルミートの多項式で

$$H_0(x) = 1,\ \ H_1(x) = 2x,\ \ \ldots,\ \ H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - dH_n(x)/dx,$$

の漸化式を満たす。またエネルギー固有値は

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

で与えられるとする。この1次元の調和振動子型ポテンシャル内で基底状態にある電子を古典的な調和振動子とみなしたときの振幅 A が

$$A \approx 7.8 \times 10^{-2}\ \mathrm{nm}$$

となることを示せ。ただし、この電子が吸収できる光の最も長い波長は上記2．と同じ **100 nm** とする。

(iv) 上記の井戸型ポテンシャルと調和振動子型ポテンシャルにおいて、基底状態の電子がそれぞれのポテンシャル内の中央にある確率密度を求め、どちらが高いか示せ。

正誤表（専門科目第5問）

頁7、(iii)、最後から2行目

誤：「...上記2. と同じ」

正：「...上記(ii)と同じ」