総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻

五年一貫制博士課程
平成 26 年度 4 月入学に係る筆記試験（専門科目）問題

（2013 年 8 月 26 日　13 時 00 分～16 時 00 分）

※開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。

以下の第１問から第６問までの６題から、４題を選択し解答せよ。

解答用紙は各問題２枚ずつ（第６問のみ３枚）ある。解答とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。

受験番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　　　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\text{第 1 問}}$

次の設問に答えよ。

1. 確率分布 X が以下のような確率密度関数 $f(x)$ に従う場合に以下の (i) から (iv) の値を求めよ。但し、$P(x_1 \leq x \leq x_2)$ とは、x が $x_1 \leq x \leq x_2$ である場合の確率を意味し、$E(X)$、$V(X)$ は確率分布 X の平均と分散を意味するものとする。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq -1) \\ \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4}x^2 & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x \geq 1) \end{cases}$$

(i) $P(0.2 \leq x \leq 0.8)$
(ii) $P(-1 \leq x \leq 1)$
(iii) $E(X)$
(iv) $V(X)$

2. 以下の行列について固有値とそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 以下で定義される周期 2π の関数について次の問に答えよ。

$$f(x) = |x| \qquad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

(i) この関数のフーリエ (Fourier) 級数を求めよ。ここで Fourier 級数は以下のように記述できることとする。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx))$$

(ii) (i) の結果を用いて以下の式を証明せよ。

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

$\boxed{\text{第 2 問}}$

1. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は微分可能である。微分の定義に従って次の式 (2.1) を示せ。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}g(x) + f(x)\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.1}$$

2. 次の積分を求めよ（不定積分の計算においては積分定数を省略してもよい）。

(i) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$

3. 次の $f(x)$ に関する常微分方程式の一般解を求めることを考える。

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + f = 0 \quad (x \neq 0) \tag{2.2}$$

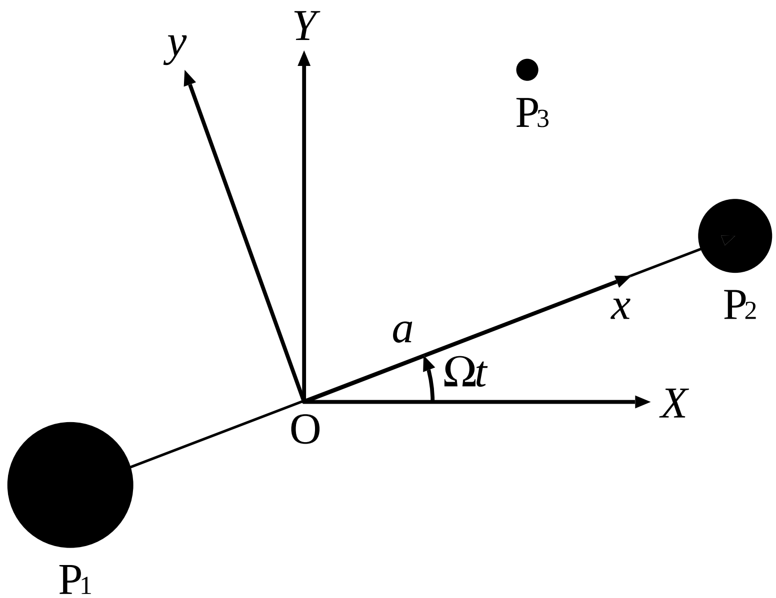
(i) 常微分方程式 (2.2) は整級数（べき級数）$u(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ の形に表される解を持つ ($a_0 \neq 0$)。$u(x)$ を解として常微分方程式 (2.2) に代入し、各項の係数 a_k を求めることにより整級数で表現された解 $u(x)$ を求めよ。ただし、$\displaystyle\lim_{x\to 0} u(x) = 1$ とする。

(ii) 上で求められた整級数 $u(x)$ が $\dfrac{\sin x}{x}$ に等しいことを示せ。

(iii) 上の $u(x)$ を使って、$f(x) = g(x)u(x)$ と置いた時、$g(x)$ に関する常微分方程式を求めよ。（この時、$u(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ であることを用いて式を書き下せ。）

(iv) 上で求めた $g(x)$ に関する常微分方程式を解き、与えられた常微分方程式 (2.2) の一般解を求めよ。

第 3 問



質点 P_1(質量 m_1) と質点 P_2(質量 m_2) の 2 体の重力場で運動する質点 P_3(質量 m_3) の運動を考える。$m_1, m_2 \gg m_3$ とし、P_1 と P_2 の運動への P_3 の重力の影響は無視できるとする。P_1 と P_2 の運動は円運動とし、P_1 と P_2 の間の距離を a とする。P_3 の運動は P_1 と P_2 の軌道面内とする。重力定数を G とする。以下の問に答えよ。

1. P_1 と P_2 の軌道面を X-Y 面とし重心を原点とする慣性系 (X, Y) を考える。P_1、P_2 の座標を $\vec{R_1} = (X_1, Y_1)$、$\vec{R_2} = (X_2, Y_2)$、P_3 の座標を $\vec{R} = (X, Y)$ とするとき、P_3 の運動方程式を書け。
2. P_1 と P_2 の円運動の角速度 Ω を求めよ。
3. P_1 と P_2 の軌道面を x-y 面、重心を原点とし、P_1 と P_2 を結ぶ軸を x 軸とし、Ω で回転する回転系 (x, y) を考える。P_1、P_2 の座標を $\vec{r_1} = (x_1, y_1)$、$\vec{r_2} = (x_2, y_2)$、P_3 の座標を $\vec{r} = (x, y)$ とする。回転系 (x, y) での P_1 と P_2 の座標 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) を求めよ。
4. 回転系 (x, y) での P_3 の運動方程式を導け。時間を t として回転系 (x, y) と慣性系 (X, Y) の関係は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

5. 回転系 (x, y) で P_3 の運動が静止する平衡点をラグランジュ点とよぶ。ラグランジュ点の条件を求めよ。
6. x 軸上にないラグランジュ点の位置を求めよ。

第 4 問

1. ある温度 T におけるエネルギー E のフェルミ (Fermi) 粒子 (化学ポテンシャル μ) の分布関数 $f(E)$ は、 次のようになる。

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}+1} \tag{4.1}$$

ただし、$\beta = \frac{1}{k_B T}$ で、k_B はボルツマン (Boltzmann) 定数である。

(i) 温度 T が 0 K に近づく極限について、$f(E)$ を図示せよ。

(ii) フェルミ (Fermi) 粒子の例を 3 つあげよ。

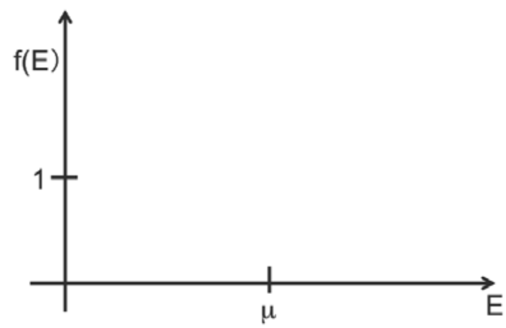


図 4.1: 解答欄の例

2. 温度 T の平衡状態にある同一の粒子からなる系を考える。量子状態 s にある (一つの) 粒子のエネルギーを ϵ_s とする。量子状態 s にある粒子の数を n_s とする。すべての量子状態を R であらわす。このとき分配関数 Z は、

$$Z = \sum_R e^{-\beta E_R} = \sum_R e^{-\beta(n_1\epsilon_1+n_2\epsilon_2\ldots)} \tag{4.2}$$

となる。

(i) 量子状態 s にある粒子の数 n_s の平均値 $\overline{n_s}$ を分配関数をもちいてあらわせ。

(ii) (i) を使って、次式

$$\overline{n_s} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_s} \tag{4.3}$$

を導け。

(iii) 量子状態 s の粒子の数 n_s の分散 Δn_s は次のようにあらわされる。

$$\overline{(\Delta n_s)^2} = \overline{(n_s - \overline{n_s})^2} = \overline{n_s^2} - (\overline{n_s})^2 \tag{4.4}$$

次の式を示せ。

$$\overline{(\Delta n_s)^2} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \overline{n_s}}{\partial \epsilon_s} \tag{4.5}$$

(iv) ここから、粒子が光子の場合について考える。光子はボーズ (Bose) 粒子なので $n_s = 0, 1, 2, 3, ...$ の場合を考えればよい。この時の光子の分配関数を求めよ。

(v) 前問の分配関数をもちいて、光子の平均数 $\overline{n_s}$ がボーズ (Bose) 分布となることを示せ。

(vi) 光子の分散について、次の式が成り立つことを示せ。

$$\overline{(\Delta n_s)^2} = \overline{n_s}(1 + \overline{n_s}) \tag{4.6}$$

第5問

1. 図1に示す回路において、抵抗 R_1、 R_2、 R_3 に流れる電流 i_1、 i_2、 i_3 を、(1) 合成抵抗を求めることによる方法、及び 、(2) キルヒホッフ (Kirchhoff) の法則を用いる方法により求めよ。

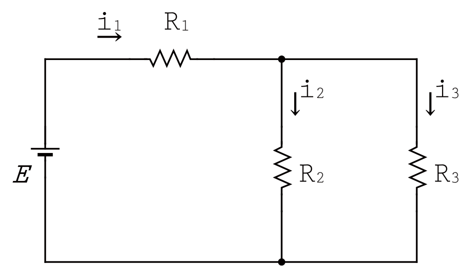


図 5.1:

2. 図2に示す3つの交流回路に角周波数 ω の正弦波電流を流すことを考える。このとき、複素電流 I とその実効値、位相角を求めよ。ただし、複素電圧 V の実効値を V_e、位相角を 0、とする。

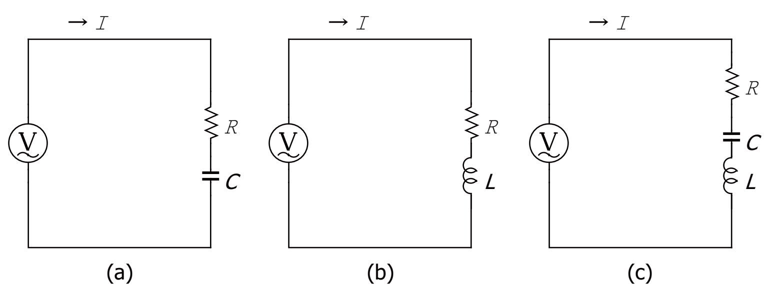


図 5.2:

3. 真空中におかれたヘルツ (Hertz) ダイポール（微小ダイポール）から r[m] の距離の点 X における電界強度 E[V/m] は、ダイポールに流れる実効電流を I[A]、ダイポールの長さを l[m]、ダイポールの軸方向と点 X の位置ベクトルとのなす角を θ、波長を λ[m] とすれば、次式で表される。

$$E = \frac{60\pi l I}{\lambda r}\sin\theta$$

このとき、ヘルツダイポールから放射される全電力 P[W] 及び放射抵抗 $R_r[\Omega]$ を求めよ。ただし、真空の特性インピーダンスは $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi[\Omega]$ とせよ。ϵ_0[F/m] は真空の誘電率、また、μ_0[H/m] は真空の透磁率を表す。

第 6 問

図 (6.1) のような円筒座標系 (z, θ, ϕ) をとり、表面からの入射光がない半無限平行平面の恒星大気を考える。全ての物理量は大気の高さ z (大気表面; $z = 0$) のみの関数とし、角度 θ 方向に進む、単位面積、単位時間、単位立体角当たりの放射強度を $I(z, \theta)$、大気の単位長さ当たりの波長に依存しない吸収係数を $\kappa(z)$、大気の単位体積、単位時間、単位立体角当たりの放射率を $j(z)$ とする。放射強度 $I(z, \theta)$ の輸送方程式は

$$\cos\theta \frac{\mathrm{d}I(z,\theta)}{\mathrm{d}z} = -\kappa(z)I(z,\theta) + j(z)$$

と記述される。ここで、光学的深さ τ ($\mathrm{d}\tau \equiv -\kappa(z)\mathrm{d}z$、大気表面; $\tau = 0$)、方向余弦 μ ($\mu \equiv \cos\theta$) を用いて整理すると、放射強度 $I(\tau, \mu)$ の輸送方程式、

$$\mu \frac{\mathrm{d}I(\tau,\mu)}{\mathrm{d}\tau} = I(\tau,\mu) - S(\tau), \quad S(\tau) \equiv \frac{j(\tau)}{\kappa(\tau)} \tag{6.1}$$

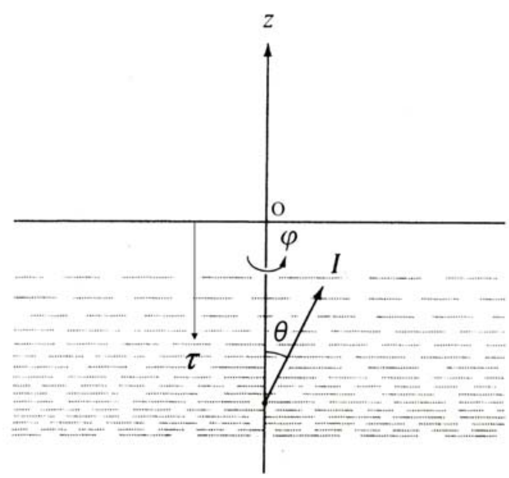


図 6.1: 半無限平行平面大気の変数・座標軸設定。表面（$\tau = 0$）からの入射はないものとする。

が得られる。$S(\tau)$ は源泉関数と呼ばれる。また、放射強度 I の μ に関する 0 次、1 次、2 次のモーメントをとり、以下のように定義する。

平均強度 : $J(\tau) \equiv \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\tau,\mu)\mathrm{d}\mu$　　放射流束 : $H(\tau) \equiv \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu\, I(\tau,\mu)\mathrm{d}\mu \equiv \frac{F(\tau)}{4}$

K 積分 : $K(\tau) \equiv \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu^2 I(\tau,\mu)\mathrm{d}\mu$

以下の問いに答えよ。

1. 有限の光学的深さ $\tau = \tau_0$ の大気層から上層に向けて、等方的な放射 I_0: $I(\tau_0, \mu) \equiv I_0$ $(0 \leq \mu \leq 1)$ があり、この層より上層の大気の再放射が無視できる（$S(\tau) = 0$; $\tau_0 \geq \tau \geq 0$）場合、大気表面からの出射強度分布 $I(0, \mu)$ $(0 < \mu \leq 1)$ を求めよ。

2. 源泉関数 $S(\tau)$ が、光学的深さ τ の関数として既知である大気を考える。

(i) 大気表面からの出射強度分布 $I(0, \mu)$ $(0 < \mu \leq 1)$ を求めると、以下の式 (6.2) が導かれることを示せ。

$$I(0, \mu) = \int_0^{\infty} S(t) e^{-t/\mu} \frac{\mathrm{d}t}{\mu} \quad (0 < \mu \leq 1) \tag{6.2}$$

(ii) 源泉関数 $S(\tau)$ が光学的深さ τ の線形な関数として記述できる場合、即ち、$S(\tau) = a + b\tau$（a, b は定数）とした時、大気表面からの出射強度分布 $I(0, \mu)$ $(0 < \mu \leq 1)$ を求め、$I(0, \mu) = S(\tau_{eb})$ となる光学的深さ τ_{eb} を求めよ。

(iii) 大気表面より上空へ鉛直に伝わるエネルギ流束（放射流束）F は、

$$F \equiv 2 \int_{-1}^{1} \mu I(0, \mu) \mathrm{d}\mu \tag{6.3}$$

と見積もることができる。源泉関数 $S(\tau)$ が $S(\tau) = a + b\tau$（a, b は定数）と記述されるとして、$F = S(\tau_{eff})$ となる有効な光学的深さ τ_{eff} を求めよ。

3. 放射輸送方程式（6.1）の μ に関する 0 次、1 次のモーメントをとると、

$$\frac{\mathrm{d}H(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}F(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = J(\tau) - S(\tau) \tag{6.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}K(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = H(\tau) = \frac{F(\tau)}{4} \tag{6.5}$$

の 2 式が得られる。更にこの時、次の 3 つの仮定：

$\pi F(\tau) = const. = \sigma T_{eff}^4$ [放射平衡]
(σ はシュテファン・ボルツマン (Stefan – Boltzmann) 定数、T_{eff}は有効温度)

$\pi S(\tau) = \pi B(\tau) = \sigma T^4(\tau)$ [局所熱平衡] ($T(\tau)$ は光学的深さτにおける温度)

$J(\tau) = 3K(\tau)$ [エディントン (Eddington) 近似]

が成立するものとして、式 (6.4)、(6.5) を連立して解き、

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4}T_{eff}^4(\tau + \frac{2}{3}) \tag{6.6}$$

が導かれることを示せ。