総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻

五年一貫制博士課程
平成23年度4月入学に係る筆記試験（専門科目）問題

(2010年8月23日 13時00分～16時00分)

※開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。

以下の第１問から第６問までの６題から、４題を選択し解答せよ。

解答用紙は各問題２枚ずつある。解答とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙、下書用紙に受験番号を記入せよ。

受験番号：________________　　氏名：________________________

第１問

次の設問に答えよ。

1. 曲面

$$f(x,y,z) = x^2 + 3y^3 + 5z^2 + 2xy + 5yz = C \quad (C\text{は定数})$$

上の点(x,y,z)において、この曲面に垂直なベクトル$\vec{n}(x,y,z)$を求めよ（ベクトル$\vec{n}$ は、規格化する必要はない）。

2. 次の定積分を複素積分の方法によって求めよ：

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

なお、被積分関数として、

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

を使用すること。

3. 次の定積分を複素積分の方法によって求めよ：

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

4. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$の条件のもとで、関数

$$h(x,y) = x^2 + y^2$$

の最小値と最大値をラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ。

第2問

1実変数方程式 $f(x)=0$ を逐次近似法で解くことを考える。簡単のために、考えている x の範囲内で常に $f'(x) \equiv df/dx > 0$ および $f''(x) \equiv d^2f/dx^2 > 0$ を満たすものとする。このとき、以下の問いに答えよ。

1. 方程式 $f(x)=0$ を既知の近似解 x_n の周りにテイラー展開し、$x - x_n$ の2次以上の項を無視して得られる1次方程式を解くことにより、次の近似解 x_{n+1} が

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_n}{f'_n}$$

と与えられることを導け。ただし $f_n \equiv f(x_n)$ および $f'_n \equiv f'(x_n)$ である。

2. 真の解を $\hat{x}$ とするとき $|x_n - \hat{x}|$ は十分小さいと仮定する。このとき、近似的に

$$x_{n+1} - \hat{x} \approx C\left(x_n - \hat{x}\right)^2$$

と書けることを示し、比例係数 C を f_n, f'_n および f''_n で表せ。

3. これらの結果を用いて $\sqrt{15}$ を小数第3位まで正しく求めよ。数値を求めるだけでなく、得られた値の精度を吟味せよ。

4. 上記の逐次近似法を改良することを考える。方程式のテイラー展開で3次以上の項を無視して得られる2次方程式において、2次項の計算を近似的に行うことにより、別の近似解が

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f_nf'_n}{2\left(f'_n\right)^2 - f_nf''_n}$$

と得られることを導け。

第3問

次の式で表されるポテンシャルと遭遇する質点の運動を考える。図を参考にして、以下の問に答えよ。

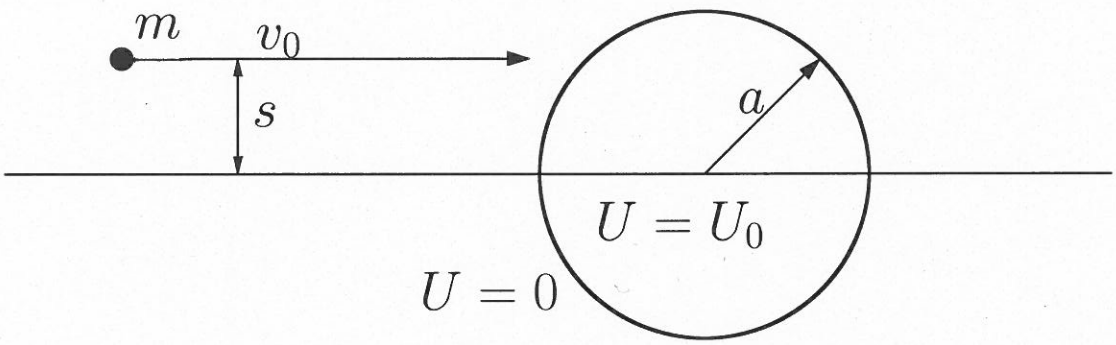
中心からの距離を r とし、　$r \le a$ のとき　$U(r) = U_0$

$r > a$ のとき　$U(r) = 0$

1. 下の図にあるように質量 m の質点が初速度 v_0、衝突パラメータ s で、このポテンシャルと遭遇するとき、エネルギーと角運動量は保存する。なぜ、これらの量が保存するかを説明し、エネルギーと角運動量の保存を表す式をそれぞれ導け。ただし、質点の速度はポテンシャル中心からの距離 r を用いて $v(r)$ とする。

2. このときの、質点の散乱角 θ を求めよ（ヒント：場合分けに注意せよ）。

3. 2. での質点の運動と、屈折率 n_0 の媒質中にある屈折率 n、半径 a の球体に、光が入射したときの光の軌跡とを比較し、類似点と相違点について論ぜよ。

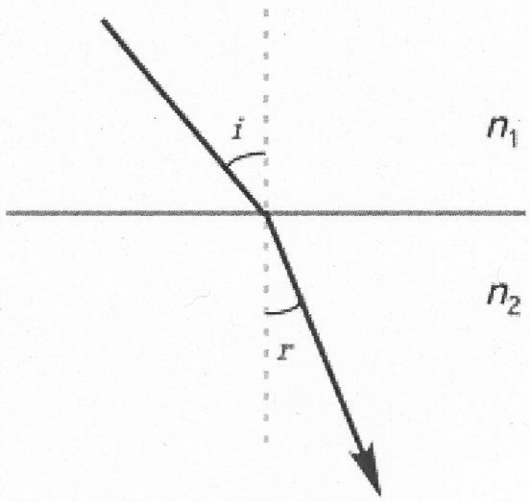


第4問

次の各問いに答えよ

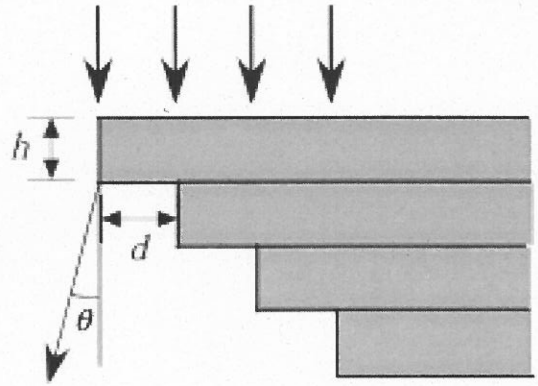
1. 光の進路について「ある 1 点を出発して別の 1 点に到達するのに要する時間が極値となるような経路を取る」というフェルマーの原理が存在する。図のように、屈折率n_1の媒質から屈折率n_2の媒質に光が進む時の入射角 i と屈折角 r の関係が式(1)で表されることを、フェルマーの原理から導け。

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \qquad (1)$$



2. 屈折率 n_0 = 1 の空気中にある、屈折率 n = 1.5、厚さ $d = 7.0\times 10^{-7}$ m の薄膜に、可視域の単色平行光線を角度を変えて入射した時、入射角 60°で反射光が明るくなった。入射光の波長を有効数字 2 桁で求めよ。ただし可視光の波長は 4.0×10^{-7} m から 7.0×10^{-7} m の範囲とする。

3. 屈折率 n、厚さ h のガラス板 N 枚を、図のように長さ d だけずらして重ねた回折格子を考える。



3.1　上から波長 λ の平行光線がガラス面に垂直に入射した時に、入射光に対して θ 方向に回折する光が干渉して強めあう条件を求めよ。なお θ は微小角と考えて良い。

3.2　この時、θ 方向を軸とする座標を x とすると、θ 方向の干渉縞の強度 I は

$$I \propto \left(\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}\right) \sin^2\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(ct - x) - D\right\}$$

の形で表される。ここで c は光速、 t は時間である。
A, B, D を N、λ、および隣あう格子面で回折する光の光路長差 δ で表せ。ただし、媒質中での光の吸収は無視して良い。

第5問

1. δ 関数で表されるような入力 (インパルス入力) をシステムに与えたときの出力 $g(t)$ を、一般に「インパルス応答」と呼ぶ。任意の入力 $x(t)$ に対するこのシステムの出力が

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)g(\tau)d\tau \tag{1}$$

のように、入力とインパルス応答の畳み込み積分で表されるためには、このシステムはどのような性質を持つことが必要か述べよ。

2. 式 (1) のようにシステムの応答が書けるとき、出力のフーリエ変換が

$$Y(\omega) = G(\omega)X(\omega) \tag{2}$$

となることを証明せよ。なお、$X(\omega), Y(\omega), G(\omega)$ は、それぞれ $x(t), y(t), g(t)$ のフーリエ変換とし、フーリエ変換の定義は次の形式とする。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

3. 図のような RC 回路を考える。

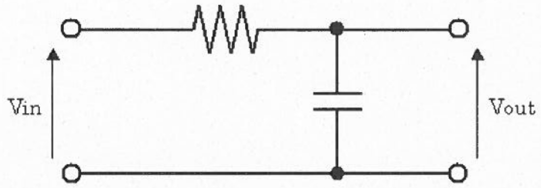


図 1: RC 回路

この回路の入力 (V_{in}) としてインパルス入力を与えたとき、出力 (V_{out}) には次のような応答が現れる。

$$g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

この RC 回路の入力電圧に角周波数 $\omega = \frac{1}{RC}$ となるような正弦波を与えたとき、出力電圧の振幅と位相とがどうなるかを問 2 の式 (2) を使って説明せよ。
なお、$g(t)$ のフーリエ変換は次のように与えられる。

$$G(\omega) = \frac{1}{i\omega RC + 1}$$

4. 上記 3. の RC 回路にパワースペクトル $P_x(\omega)$ が、

$$P_x(\omega) = \lim_{T=\infty} \frac{X(\omega)X^*(\omega)}{T} = e^{-(\omega-\omega_0)^2/a}$$

で与えられるような不規則な電圧を入力させたときの、出力のパワースペクトル $P_y(\omega)$ を求めよ。

第6問

距離$d=10kpc$にあり、角半径$\theta=10$分角に拡がる球状星団を望遠鏡で観測した。星団中の恒星約100個を分光してその視線速度を測定した結果、視線速度の平均値Vと速度分散σは$V=60kms^{-1}, \sigma=4.0kms^{-1}$となった。万有引力定数$G=6.67\times10^{-11}m^3s^{-2}kg^{-1}$、光速$c=3.00\times10^5kms^{-1}$、太陽質量$M_\odot=1.99\times10^{30}kg$、$1pc=3.09\times10^{13}km$として以下の考察をせよ。計算の有効数字は1桁で良い。

1. 球状星団の内部運動が等方的な乱雑運動だと仮定して、恒星の固有運動μ(秒角/年)の大きさの期待値を求めよ。

2. 恒星の分散運動のエネルギーが球状星団の重力ポテンシャルエネルギーと釣り合っていると仮定して、球状星団の質量を求めよ。

3. 球状星団の星が全て0.5太陽質量のM0型星(絶対等級+8.7等)だと仮定して、恒星数Nを求めよ。

4. これらの恒星がすべて半径Rの同心球内に一様に分布していると単純化したときの、恒星間平均距離pを求めよ。

5. これらの情報を参考にして、球状星団の中心近くにある恒星を周回する地球のような惑星から見える夜空について考察せよ。

訂正：　第１問　小問４
誤：　<u>最小値と最大値</u>
正：　<u>極小値と極大値</u>