総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻
五年一貫制博士課程
平成21年度4月入学に係る筆記試験（専門科目）問題

(2008年8月25日 13時00分～16時00分)

問題は2頁から11頁まで6題ある。この中から4題を選択し解答せよ。
解答用紙は各問題2枚ずつある。
解答とともに問題、下書用紙も回収するので、問題表紙、解答表紙に氏名と受験番号を、すべての解答用紙に受験番号を記入せよ。
※開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。

受験番号 ____________________　　氏名 ____________________

$\boxed{\text{第1問}}$

次の設問に答えよ。

1. 半径1の円周上にすべての頂点がある正24角形の面積を求めよ。

2. 以下の関係式を満たす (x, y) の組を求めよ。また、2次元直交座標系上においてこれらの (x, y) を頂点とする四辺形の面積を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^4 \\ y-2x^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20x^2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. xyz 直交3次元空間において、原点を中心とする半径 r の球と、平面 $z = r\sin\theta$ (θ は $0 < \theta < \pi/2$ を満たす定数) が交わってできる軌跡を S とする。S 上の点を表す位置ベクトル $\vec{s}$ を、直交する2つの単位ベクトル $\vec{e}_X=(0,1,0)$, $\vec{e}_Y=(-\sin\delta, 0, \cos\delta)$ に投影した成分をそれぞれ X, Y とするとき、X と Y の間に成り立つ関係式を求め、XY 平面上でのその軌跡を図示せよ。ただし、$0 \leq \delta < \pi/2$ とする。

4. 以下で定義される関数

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

のフーリエ変換

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}\mathrm{d}x$$

を求めよ。ただし、$i^2 = -1$ である。

第2問

$t \geq 0$, $x \geq 0$ で定義された関数 $f(t,x)$ について、以下の２種類の微分方程式を与えられた条件のもとで解いて、$f(t,x)$ を求めよ。ただし k, ω_0 は正の定数、$i^2=-1$ である。また $\exp\theta = e^\theta$ である。

1. $\dfrac{\partial f}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

   ただし $f(t,x)$ は変数分離できるものとし、次の条件

$$\lim_{x\to\infty} f(t,x) = 0$$

$$f(t,0) = \exp(i\omega_0 t)$$

   をみたすものとする。

2. $ik\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

   ただし $f(t,x)$ は t のみの~~実~~関数 $h(t)$ と $g(t)$ を用いて
   $f(t,x) = \exp\{h(t) - x^2 g(t)^2\}$ の形で表せるものとし、

$$f(0,x) = \exp(-x^2)$$

   をみたすものとする。

$\boxed{\text{第3問}}$

質量 m で内部構造のない粒子の球対称な中心力ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ による散乱を考察する。ポテンシャルは十分遠方（$r = |\mathbf{r}| \to \infty$）で $V(\mathbf{r}) \to 0$ になっているとする。粒子の運動エネルギーを $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ と書き定常状態だけを考えると、波動関数は $\Psi(\mathbf{r}, t) = \exp\left(-i\dfrac{Et}{\hbar}\right)\ \psi(\mathbf{r})$ と書き表すことができる。ここで、k は波数、$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$、h はプランク定数、また $i^2 = -1$、$\exp\theta = e^\theta$ である。以下の設問に答えよ。

1. 座標表示の波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ のフーリエ変換を $\phi(\mathbf{K}) = \int \exp(-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})\ \psi(\mathbf{r})\ d\mathbf{r}$ と表すとき、シュレディンガー方程式は運動量空間で式 (1) のように書けることを示せ。

$$\frac{\hbar^2}{2m}(K^2 - k^2)\ \phi(\mathbf{K})\ +\ \int \exp(-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})\ V(\mathbf{r})\ \psi(\mathbf{r})\ d\mathbf{r}\ =\ 0. \tag{1}$$

2. $(K^2 - k_i{}^2)\ \delta(\mathbf{K} - \mathbf{k_i}) = 0$ を利用して、式 (1) に入射平面波 $\exp(i\mathbf{k_i}\cdot\mathbf{r})$ を付け加えると、$\phi(\mathbf{K})$ の形式解は式 (2) のように表すことができる。ここで、$k_i = |\mathbf{k_i}|$ であり、式 (2) の右辺第二項は、分母に $-i\epsilon$ を付けることによってポテンシャル中心から発散してゆく散乱波を取り出すことを表しており、境界条件を満たしている。積分方程式 (2) の逆フーリエ変換を計算して、座標表示の波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ が満たすべき積分方程式が式 (3) となることを証明せよ。式 (2) の第二項を $K = |\mathbf{K}|$ に関して積分するときに留数の定理を用いることに注意せよ。

$$\phi(\mathbf{K}) = (2\pi)^3\ \delta(\mathbf{K} - \mathbf{k_i})\ -\ \frac{1}{\frac{\hbar^2}{2m}(K^2 - k_i{}^2 - i\epsilon)} \int \exp(-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})\ V(\mathbf{r})\ \psi(\mathbf{r})\ d\mathbf{r}, \tag{2}$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k_i}\cdot\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int \frac{\exp(ik_i|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\ V(\mathbf{r}')\ \psi(\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}'. \tag{3}$$

式 (3) は既知であるとして、以下の設問に答えよ。

3. ポテンシャルの効果が小さいとして、積分方程式 (3) を逐次近似（ボルン近似）の方法で解いてみる。すなわち、右辺第二項の波動関数として入射平面波 $\psi^{(0)}(\mathbf{r}') = \exp(i\mathbf{k_i}\cdot\mathbf{r}')$ を代入すると、この積分方程式の近似解は次の式で表わすことができる。

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r}) \approx \exp(i\mathbf{k_i}\cdot\mathbf{r}) + f^{(1)}(\theta, \phi)\ \frac{\exp(ik_i r)}{r}. \tag{4}$$

$f^{(1)}(\theta, \phi)$ を散乱振幅と呼び、粒子の入射方向を量子化軸（z 軸）とした場合の散乱角 θ と ϕ の関数である（図1参照）。散乱振幅 $f^{(1)}(\theta, \phi)$ はどのような積分で書き表わされるか示せ。ここで、散乱前後の波数ベクトル $\mathbf{k_i}$、$\mathbf{k_f}$ は図1の関係にあり、$r' \ll r \to \infty$ で $ik_i|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = ik_i[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta]^{1/2} \approx ik_i r - ik_i r'\cos\theta$、$ik_i r'\cos\theta = i\mathbf{k_f}\cdot\mathbf{r}'$ となることに注意せよ。$k_i = |\mathbf{k_i}| = |\mathbf{k_f}|$ である。

4. ボルン近似で、球対称な湯川ポテンシャル $V(r) = V_0 \dfrac{\exp(-\lambda r)}{\lambda r}$ に対する散乱振幅 $f^{(1)}(\theta, \phi)$ が式 (5) となることを導け。また、散乱の微分断面積は式 (6) で与えられる。ここで、$d\Omega$ は θ、ϕ 方向の微小立体角である。角度積分を実行することによって散乱の全断面積を求め、波数（$k_i = |\mathbf{k_i}| = |\mathbf{k_f}|$）依存性を図示せよ。

$$f^{(1)}(\theta, \phi) \ = \ - \ \frac{2m}{\hbar^2} \frac{V_0}{\lambda^3} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + |\mathbf{k_f} - \mathbf{k_i}|^2}. \tag{5}$$

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = |f^{(1)}(\theta, \phi)|^2. \tag{6}$$

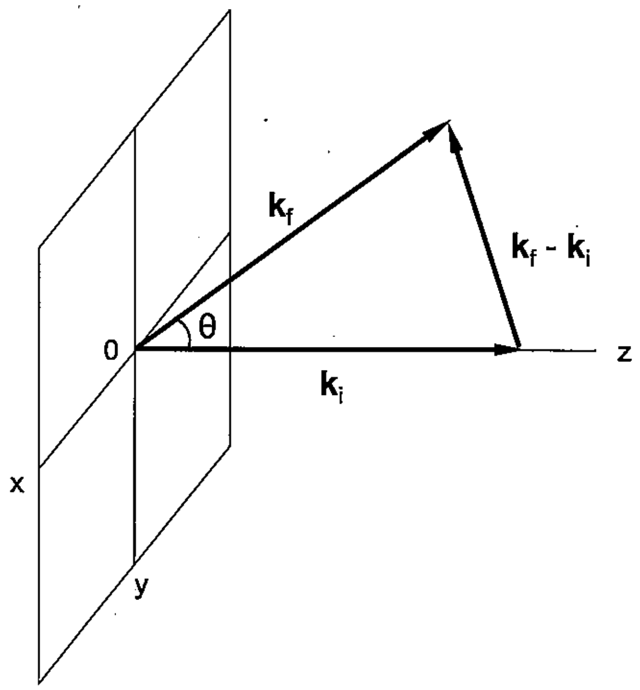

図 1: 波数ベクトル $\mathbf{k}_i$、$\mathbf{k}_f$ の関係

第4問

超伝導体中では、電流密度 $\mathbf{J} = nq\mathbf{v}$(電子の質量 m、電荷 q、密度 n) と電場 $\mathbf{E}$ との関係は次のように表わされる。

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \frac{nq^2}{m}\mathbf{E}. \tag{1}$$

1. 式 (1) 及びマクスウェルの方程式を用いて、電流密度 $\mathbf{J}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の関係式 (2) を導け。

$$\nabla \times \mathbf{J} + \frac{nq^2}{m}\mathbf{B} = \mathbf{C}. \tag{2}$$

ここで $\mathbf{C}$ は、時間に依存しない定数ベクトルである。

2. 次に式 (2) の特別な場合として、$\mathbf{C} = 0$ を考える。マクスウェルの方程式をもちいて、次の式を導け。$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$($\mathbf{H}$ は磁場、μ_0 は透磁率) とし、電場の時間変化はないものとする。

$$\nabla^2\mathbf{B} = \frac{n\mu_0 q^2}{m}\mathbf{B}. \tag{3}$$

ベクトル解析の公式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B}$ をもちいてよい。

3. 図1のように深さ方向を z ($z > 0$) とする半無限長の超伝導体に、x 方向の一様な磁束密度 $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_x$ ($\mathbf{e}_x$ は x 方向の単位ベクトル) が加えられている。式 (3) より $B_x(z)$ の微分方程式を解き、超伝導体中の z と $B_x(z)$ の関係を図示せよ。また、磁束密度が $1/e$ となる侵入長 λ_L を求めよ。

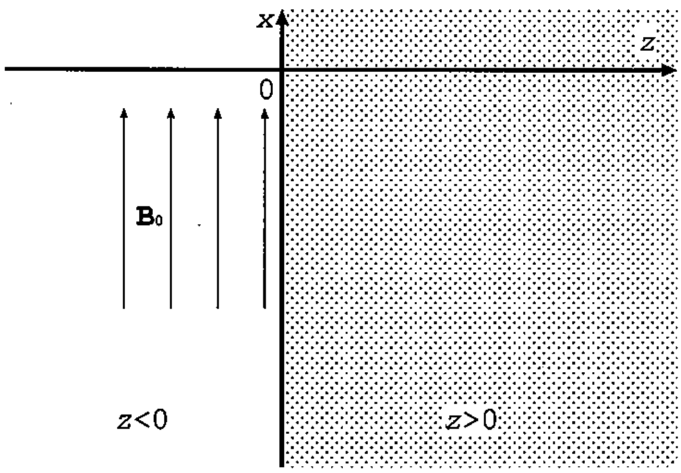

図 1: $z < 0$ は真空、$z \geq 0$ は超伝導体が全空間を占めている。

以下の統計力学の問題に答えよ。

4. ボーズ粒子は次の分布関数に従う。

$$f_B(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} - 1}. \tag{4}$$

ここで E はエネルギー、μ は化学ポテンシャル、k はボルツマン定数、T は温度を表わす。横軸をエネルギーとしてボーズ分布関数を図示せよ。

5. 化学ポテンシャル μ を用いて、フェルミ分布関数 $f_F(E)$ の式を示せ。$kT \ll \mu$ の場合に、設問 4. と同様にフェルミ分布関数を図示せよ。このときの化学ポテンシャルの物理的な意味を説明せよ。

6. ある物質に熱エネルギー dQ を与えたとき、その物質の温度が dT だけ変化したとすると比熱は $c = \dfrac{dQ}{dT}$ と与えられる。全エネルギー U が温度 T と体積 V の関数として表わされるとき、比熱の式 c を、U、V、T、p(圧力) で表わせ。ただし、$dQ = dU + pdV$ が成り立つものとする。

7. 格子振動はボーズ粒子として扱える。格子振動の全エネルギーは $U = 3Nf_B(E)\hbar\omega$ で与えられる。ここで N は振動子の数、$\hbar$ はプランク定数、ω は角振動数である。化学ポテンシャル $\mu = 0$ とし、体積が一定の時の比熱 (定積比熱) c_V を求めよ。また、温度と定積比熱の関係を図示せよ。

第5問

回転軸から距離 r_i にある質量 m_i の質点 $(i=1,\ldots,N)$ よりなる剛体は、その軸の周りの慣性モーメント $I=\sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2$ を持つ。次の設問に答えよ。

1. 半径 a、質量 M の一様な密度 ρ をもつ球を考える。中心を通る軸の周りの慣性モーメント I が $I=\frac{2}{5}a^2M$ であることを示せ。

2. 半径 a、質量 M の厚みが無限に薄い球殻を考える。中心を通る軸の周りの慣性モーメントを求めよ。

3. 設問 1. の球を水平面からの角度が θ である斜面上を、静止している状態から、滑らないように転がした (図 1)。重力加速度を g とし、転がり摩擦は無視できるとする。初期位置から球の中心が移動した距離を x とし、エネルギー保存則から、x 方向の加速度 d^2x/dt^2 を求め、微分方程式を解いて、x と t の関係を求めよ。

4. 半径 a、質量 M の外観が球形をした二つの物体 A と B がある。外観は全く同じであるが、A は密度一様な球、B は中が空洞となっている球殻である。この二つの球を壊さないで識別する方法を答えよ。

5. 半径 a、一様密度 ρ_0 の、大気を持たない球形の天体が周期 T_0 で自転していた。この表面に隕石による塵が一様密度 (ρ_1) で厚さ h だけ積もったとする。降り積もった後の自転周期 T_1 を求め、天体の自転周期がどのように変化するかを述べよ。ただし、降り注ぐ隕石は角運動量を持ち込まないとし、厚さ h は半径 a に比べ十分に小さいものとする。

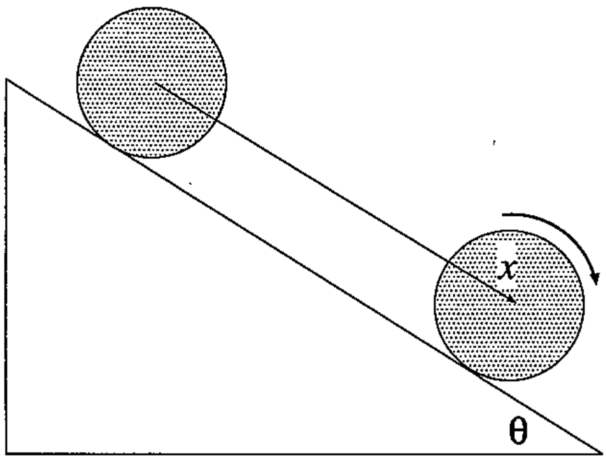

図 1: 斜面を転がる球

空白頁

第6問

時刻 $t=t_0$ に2点間の距離 $a(t_0)$ だったものが時刻 $t=t_1$ には距離 $a(t_1)$ になるような、時間とともに空間スケールがゆっくりと連続的に膨張する座標系を考える。時刻 $t=t_0$ から $t_0+\delta t_0$ の間に、ある地点Sを出発した振動数 ν_0 の光が、$t=t_1$ から $t_1+\delta t_1$ の間に振動数 ν_1 となって地点Oに到達した。このとき以下のような関係が成り立つものとし、さらに変数 z を次のように定義する。

$$\frac{\delta t_1}{\delta t_0}=\frac{a(t_1)}{a(t_0)}\equiv 1+z \tag{1}$$

このとき以下の式が成り立つ。

$$\nu_0=(1+z)\nu_1 \tag{2}$$

以下の設問に答えよ。なお以下の設問1.–3.は、ある設問が解けなくても別の設問は解答可能である。

(1) まず単一振動数の光の放射を考える。プランク定数を h、Sからのエネルギー放出率(光度)を L[J/s] として、時刻 $t=t_0$ から $t_0+\delta t_0$ の間にSから放出される光子数 N を表せ。次に、時刻 t_1 のSとOの距離を r[m]、地点Oで単位時間、単位面積に届く光のエネルギー流束を f[J/s/m^2] とするとき、以下の式で定義される距離 D_L[m]

$$D_L\equiv\sqrt{\frac{L}{4\pi f}} \tag{3}$$

は $D_L=r(1+z)$ となることを示せ。

(2) 振動数ごとに光の強度が異なる放射（連続スペクトル）の場合も同じように考えることができる。振動数 ν から ν+dν までのSからのエネルギー放出率(光度)が $L_\nu(\nu)\mathrm{d}\nu$[J/s] と表されるとき、地点Oでの振動数 ν から ν+dν までのエネルギー流束 $f_\nu(\nu)\mathrm{d}\nu$[J/s/m^2] は以下の式で書けることを示せ。

$$f_\nu(\nu)=\frac{L_\nu(\nu(1+z))(1+z)}{4\pi D_L^2} \tag{4}$$

(3) ここで、以下の式で定義される等級を導入しよう。

$$m_\nu\equiv-2.5\log_{10}(f_\nu(\nu)) \tag{5}$$

等級 m_ν は観測される $f_\nu(\nu)$ に対応する物理量だが、$L_\nu(\nu)$ に対応する量として、以下の M_ν を定義する。

$$M_\nu\equiv-2.5\log_{10}(L_\nu(\nu)) \tag{6}$$

今、ある天体からの光が振動数 ν_1、等級 m_{ν_1} として観測されたとする。この光の同じく振動数 ν_1 における M_{ν_1} を求めたい。Sからの放射 $L_\nu(\nu)$ として以下の3つの場合について考察する。

(a) $L_\nu(\nu)$が振動数によらない（$L_\nu(\nu)$=一定）の場合、$m_{\nu_1} - M_{\nu_1}$ を z と D_L の式で表せ。

(b) $L_\nu(\nu) \propto \nu^{-1}$ のエネルギー分布を持つクエーサーの場合、$m_{\nu_1} - M_{\nu_1}$ は距離だけの関数になることを示せ。

(c) Sからの放射源として、図1に示すようなエネルギー分布を持つ楕円銀河を考える。Oから見て $z = 0$ となる地点S_Aにある楕円銀河と $z = 1$ となる地点S_Bにある楕円銀河の2つを観測し、両者の $m_{\nu_1} - M_{\nu_1}$ の差 $\Delta(m_{\nu_1} - M_{\nu_1}) = (m_{\nu_1} - M_{\nu_1})_A - (m_{\nu_1} - M_{\nu_1})_B$ を測定したい。$\nu_1 = 8 \times 10^{15}$Hz における観測と $\nu_1 = 4 \times 10^{15}$Hz における観測で、$\Delta(m_{\nu_1} - M_{\nu_1})$ の値が大きいのはどちらか、その理由とともに述べよ。

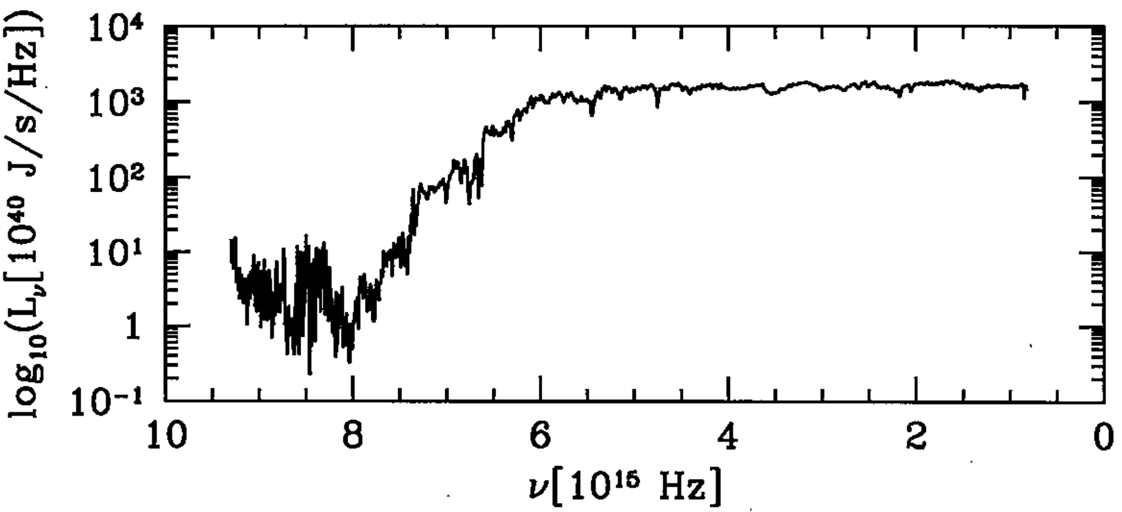

図 1: 楕円銀河のエネルギー分布 (スペクトル)

$\boxed{\text{空白頁}}$

訂正表

専門科目
数学第２問（2）

誤）
　ただし、f(t,x)はｔのみの実関数 h(t)と g(t)を用いて
正）
　ただし、f(t,x)はｔのみの関数 h(t)と g(t)を用いて