総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻
五年一貫制博士課程
平成19年度4月入学に係る筆記試験（専門科目）問題

(2006年9月5日 13時00分〜16時00分)

以下の第1問から第6問までの6題から4題を選択し解答せよ。
※開始の指示があるまで問題冊子を開かないこと。

受験番号 ________________　　氏名 ________________

第１問. 次の各問に答えよ。

(1) (a) 行列

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値、および規格化した固有ベクトルを全て求めよ。

(b) ２次式

$$3x^2 + 4xy + 3y^2 = 5$$

の表す曲線の形状について答えよ。

(2) 次の関数 $f(z)$、$g(z)$ を $z = 1$ の周りでテイラー展開せよ。またその収束半径を求めよ。

(a) $f(z) = \frac{1}{z}$

(b) $g(z) = z^3$

(3) 関数

$$z^2 \sin \frac{1}{z}$$

を $z = 0$ の周りでローラン展開せよ。またその結果を用いて複素積分

$$\int_C z^2 \sin \frac{1}{z} dz$$

の値を求めよ。但し積分路 C は原点を中心とする半径１の反時計回りの円周とする。

(4) 次の周期関数 $F(x)$、$G(x)$ をフーリエ級数に展開せよ。

(a) $F(x)$ は周期 2π の関数で、$-\pi < x < \pi$ の区間で $F(x) = x$ と定義。

(b) $G(x)$ は x の全区間で $G(x) = \sin^3 x$ と定義。

第 2 問. 次のように与えられる微分方程式、

$$\Delta\phi(x) = R(x), \quad (\Delta \equiv \frac{d^2}{dx^2}) \tag{1}$$

を満たす $\phi(x)$ を求めてみよう。ただし、$R(x)$ は、なめらかな連続関数で $x \to \pm\infty$ で十分に速くゼロになるものとする。また、$\lim_{x\to\infty} \frac{d\phi}{dx} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{d\phi}{dx}$ を満たすものとする。以下の各々の問いに答えよ。

(1) 先ず、$\Delta G(x,s) = \delta(x-s)$ を満たす関数 $G(x,s)$ を求めることとする。ここで、$\delta(x)$ はデルタ関数 注) である。このとき、

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \Delta G(x,s) dx、すなわち、\lim_{\epsilon\to 0} \left[\frac{dG}{dx}\right]_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \quad (\epsilon > 0)$$

の値を求めよ。

(2) $x \neq s$ では、$\Delta G(x,s) = 0$ を満たす。$\Delta y(x) = 0$ となる解は、一般に C, D を定数として $y(x) = Cx + D$ と書ける。そこで、$G(x,s)$ を次のように置いてみる。

$$G(x,s) = \begin{cases} y_1(x) \equiv C_1 x + D_1, & x \leq s \\ y_2(x) \equiv C_2 x + D_2, & x \geq s \end{cases} \tag{2}$$

ここで、C_1, C_2 は定数であり、D_1, D_2 は s のみの関数とする。問 (1) の結果を用いて、C_2 を C_1 を用いてあらわせ。

(3) 問 (2) で求めた条件と、連続の条件 $y_1(s) = y_2(s)$ から、D_2 を D_1 を用いてあらわせ。

(4) 関数 G が、$G(x,s) = G(s,x)$ という対称性を持つとする。その条件式を (2) 式を用いて書け。さらに、その条件と問 (3) までの結果を使うことにより、C_1 だけを用いて $G(x,s)$ を書き下せ。

(5) C_1 の値を次の条件から求め、$G(x,s)$ を書き下せ。

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{dG(x,s)}{dx}\right] = -\lim_{x\to-\infty} \left[\frac{dG(x,s)}{dx}\right]$$

(6) $G(x,s)$ を用いて、(1) 式をみたす $\phi(x)$ を書き下せ。また、そのように書ける理由も述べよ。

注：デルタ関数は以下のような特徴を満たす。

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \quad (x \neq 0), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx &= f(0) \text{（ただし、} f(x) \text{ は } x = 0 \text{ で連続であるとする）} \end{aligned}$$

第 3 問. 次の問いに答えよ。必要に応じ以下の定数値を使用せよ。重力加速度 $g = 10\mathrm{m\,s^{-2}}$、気体定数 $R = 8.3\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$、ボルツマン定数 $k = 1.4 \times 10^{-23}\mathrm{J\,K^{-1}}$、水素質量 $m_{\mathrm{H}} = 1.7 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$、アボガドロ数 $N = 6.0 \times 10^{23}\mathrm{mol^{-1}}$、1 モル (0°C, 1 気圧) の気体の体積 $V_m = 2.2 \times 10^{-2}\mathrm{m^3}$ 。また、数値計算する際は、必要に応じて適当な近似式、たとえば、$e^x \simeq 1 + x + x^2/2$、あるいは、$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$ 等を用い、使った近似式を明記せよ。

(1) 水素分子ガスの定積モル比熱を測定すると、絶対温度に対して図のように変化したという。室温での値はおよそ $C_V \simeq 2.5R$ であった。

(a) 水素分子ガスが理想気体であると仮定すると、比熱比（定積比熱と定圧比熱の比）$\gamma = C_p/C_V$ はいくらになるか。理由を付して答えよ。

(b) この事実は、室温で水素分子ガスがどのような状態にあることに対応しているのか。低温 ($T < 50\mathrm{K}$) および高温 ($T > 5000\mathrm{K}$) の温度領域との違いは何に原因があるかにも言及して説明せよ。

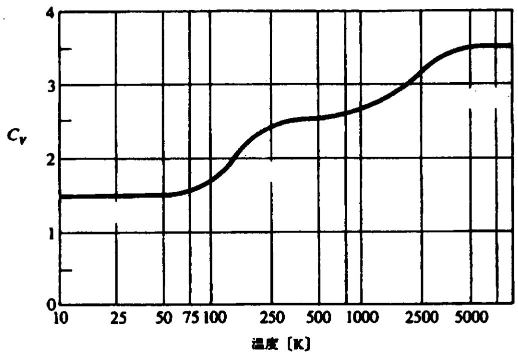

図 1: H_2 に対する、気体定数を単位とした定積モル比熱の温度変化
（キッテル著、「熱物理学第 2 版」63 ページ図 3.9 より改変）。

(2) さて、ハワイ島マウナケアの山頂（海抜 4000m）は空気が薄い。空気を理想気体と考え、そこでのおよその気圧を求めなさい。問題を簡単にするために、地表面（海抜 0m）での気圧は 1 気圧、気温は摂氏 17 度で、高度によって気温は変化せず、空気の平均分子量は 29 と仮定せよ。

(3) 同山頂から空のペットボトルを一つ持ち帰った。山頂で堅く口栓をしたので、ある地点まで下ったら、ペットボトルはややつぶれてその体積が 1 割減少した。その時、ペットボトル内の空気の温度は何度になっているか、およその数値を求めなさい。ただし、ペットボトルは、表面から熱の出入りが無く（断熱的であり）、かつ外気圧に釣り合って自由変形可能であるとする。なお、ここでも高度によって気温は変化せず、空気の平均分子量は 29 と仮定せよ。

第 4 問. 電磁波について、以下の問に答えよ。電場 $\boldsymbol{E}$、電束密度 $\boldsymbol{D}$、磁場 $\boldsymbol{H}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}$、電流密度 $\boldsymbol{J}$、電荷密度 ρ を用いると、MKSA 単位系での Maxwell 方程式は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \\
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} &= \rho, \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} &= 0
\end{aligned}
$$

と書ける。以降、誘電率 ϵ、透磁率 μ、電気伝導度 σ が一定で、電荷のない $(\rho = 0)$ 物質を考える。

(1) この物質内を z-方向に進む角振動数 ω の直線偏光した電磁波を考える。x,y 軸を適当に取ると、$E_x = \tilde{E}_x(z)\exp(i\omega t)$、$H_y = \tilde{H}_y(z)\exp(i\omega t)$ としたとき、$\tilde{E}_x$ および $\tilde{H}_y$ が満足する方程式が

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 \tilde{E}_x}{dz^2} &= (-\epsilon\mu\omega^2 + i\sigma\mu\omega)\tilde{E}_x, \\
\frac{d^2 \tilde{H}_y}{dz^2} &= (-\epsilon\mu\omega^2 + i\sigma\mu\omega)\tilde{H}_y
\end{aligned}
$$

のようになることを示せ。

(2) このとき、次の各問に答えよ。

(a) $\tilde{E}_x = E_0 \exp(-az)\exp(ikz)$ と置いたときの、a および k を ϵ、μ、σ、ω を用いて表せ。

(b) E_x と H_y の位相差を、ϵ、μ、σ、ω、および角 $\gamma = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)$ を用いて表せ。

(3) ここで、この物質が良導体 $(\sigma \gg \epsilon\omega)$ であったとき、次の各問に答えよ。

(a) 電磁波の表皮の厚さ (skin depth; 透過距離 penetration depth とも呼ぶ) を求めよ。

(b) そのとき、E_x と H_y の位相差は 45 度になることを示せ。

(c) そのとき、磁場のエネルギーは電場のエネルギーに比べて非常に大きいことを示せ。

注：必要なら、ベクトル解析の公式

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \\
\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} \\
\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \\
\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) &= -(\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{A}^2
\end{aligned}
$$

を用いてよい。

第 5 問. 質量 M(g)、半径 R(cm)、表面温度 T(K) を持つ恒星 A の周りを、表面が黒体で球形風船状の人工惑星 B(質量 m(g)、半径 r(cm)) が、半径 d(cm) の円軌道を描きながら公転運動している。円軌道の半径 d は、恒星 A の半径 R に比べて非常に大きいとする。また恒星 A の表面は黒体と仮定できて、恒星 A の表面 $1\mathrm{cm}^2$ から 1 秒間に放射されるエネルギー $E(\mathrm{erg\,cm^{-2}\,s^{-1}})$ は、ステファン・ボルツマンの法則に従い、

$$E = \sigma T^4$$

となる。ここで σ はステファン・ボルツマン定数であり、$\sigma = 6.0 \times 10^{-5}(\mathrm{erg\,cm^{-2}\,K^{-4}\,s^{-1}})$ である。また必要であれば以下の数値を使用してよい。万有引力定数: $G = 7.0 \times 10^{-8}(\mathrm{cm^3\,g^{-1}\,s^{-2}})$, 光速度: $c = 3.0 \times 10^{10}(\mathrm{cm\,s^{-1}})$。以下の問いに答えよ。

(1) このとき、人工惑星 B の表面温度を式で表せ。ただし人工惑星の熱伝導率は十分に良いとし、自転はしていないとする。

(2) 恒星 A の表面温度を 1.0×10^4K、質量を 4.0×10^{33}g、半径を 1.0×10^{11}cm とし、人工惑星 B の半径を 1.0×10^4cm、質量を 3.0×10^5g、公転半径を 2.0×10^{13}cm とした時、人工惑星 B の表面温度はいくらになるか計算し 1 桁の精度で答えよ。

(3) 光は光子の集まりであり、エネルギーを持つだけでなく運動量も持つ。特殊相対論の示すように、その大きさは光子のエネルギーを光速度で割ったものに等しく、運動量の方向は光にすすむ方向になる。問 (1) の時、人工惑星 B が恒星 A の光を受けることによる力を式で示せ。

(4) 人工惑星 B の公転速度 v はいくらになるか計算し 1 桁の精度で答えよ。ただし恒星 A と人工惑星 B についての数値は問 (2) で掲げたものを使用せよ。

(5) 人工惑星 B の反射率が 1 に変化した時、B が恒星 A の光を受けることによる力が問 (3) と同じになることを示せ。

第6問. 以下の問に答えよ。

(1) 恒星の視線速度は、星のスペクトルに現れた吸収線のドップラー効果から測定する。測定した星のスペクトル線の波長と、そのスペクトル線の実験室での波長を、それぞれ λ と λ_0 とし、その差を $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ と書くことにしたとき、視線速度 V_r を与える式を求めよ。ただし、光速度は c としてよい。

(2) 質量 M_1 と M_2 の二つの星が引力で結ばれている連星系の場合には、ケプラーの第三法則は、公転軌道の半長径を a とし、公転周期を T とすれば、

$$\frac{a^3}{T^2} = M_1 + M_2$$

で与えられる。ただし、a は天文単位 $(1.50 \times 10^8$ km) を、T は1年 $(3.16 \times 10^7$ s) を、そして、質量は太陽質量 $(1.99 \times 10^{30}$ kg) を単位としてある。

いま、主星（質量 M_1）を基準として測った伴星（質量 M_2）の軌道から、$a = 20$ 天文単位、$T = 50.0$ 年、重心に対する主星（-1.5 等の主系列星）と伴星（$+8.5$ 等）のそれぞれの軌道の半長径 a_1、a_2 の比が $a_1/a_2 = 1/2$ であることが分かった。主星と伴星の質量を求めよ。また、この伴星はどのような星であるか。

(3) すばる望遠鏡が発見した、HD149026 という恒星の回りに存在する惑星は、地球がその惑星の公転軌道面の中にある。いったいどのような現象を観測したことにより、惑星の存在が明らかになったと考えられるか、簡略に記せ。

(4) この惑星の質量は土星よりやや大きい（1.2倍）が、直径は土星より一回り小さい（0.86倍）ことがわかった。これをもとにして、この惑星の内部についてどのようなことが言えるかを述べよ。土星の平均密度が 0.69（単位は $10^3 \mathrm{kg\,m^{-3}} = \mathrm{g\,cm^{-3}}$）であることを参考にせよ。

(5) 主系列星の光度 L と質量 M との間には光度−質量関係と呼ばれる、次のような関係が存在することが知られている。

$$L \propto M^{\alpha}, \qquad (\alpha = 3)$$

これをもとに、星の主系列の寿命 τ と質量 M の関係を表せ。

(6) 次の表は太陽の近傍にある主系列星の質量の一覧である。惑星が誕生してから、生命が発生し文明に成長するまで、少なくとも25億年の時間の経過が必要であるとしよう。このことから、文明が現存する「可能性のない恒星」を表から抜き出せ。ただし、太陽の寿命を100億年とし、恒星と惑星は同時に形成されるとせよ。

星名	スペクトル型	質量 (太陽質量単位)
Sun	G	1.00
η Cas A	G	0.87
Sirius A	A	2.14
Procyon A	F	1.78
70 Oph A	K	0.89
ζ Phe B	A	3.00
Z Her A	F	1.22