

総合研究大学院大学物理科学研究科天文科学専攻
五年一貫制博士課程
平成18年度4月入学に係る筆記試験（専門科目）問題

(2005年9月6日 13時00分～16時00分)

以下の問1から問6までの6題から4題を選択し回答せよ。

※はじめの指示があるまで問題冊子を開かないこと。

受験番号 _____

氏名 _____

問 1 次の実変数関数 (1),(2) のグラフをかけ。また、(3) - (6) を求めよ。

(1) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n} + 1}$

(2) $f(x) = \frac{a-1}{x^2 - (a+1)x + a}$

(3) $\sin 15^\circ$

(4) 1 の 3 乗根と $-i$ の 3 乗根

(5) $\int_0^{1/a} x^2 e^{ax} dx$

(6) 次の行列の Trace, 行列式、逆行列、固有値、固有ベクトル。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

問 2

- (1) 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y(x) = 0 \quad (1)$$

- (2) 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y(x) = 0 \quad (2)$$

- (3) 2階の同次線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = 0 \quad (3)$$

において、 $y = u(x)v(x)$ とおいたときに、

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \phi(x)u(x) = 0 \quad (4)$$

- (4) を与える、 $v(x)$ および $\phi(x)$ を f_1, f_2 、およびそれらの導関数 $\frac{df_1}{dx}, \frac{df_2}{dx}$ を用いて書き下せ。
関数 $y(x)$ に関する微分方程式、

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -y^n \quad (5)$$

の解を以下の場合について求めよ。

- (ア) $n = 0$ の場合。ただし、境界条件が $y(0) = 1, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$ とする。
(イ) $n = 1$ の場合の一般解。このとき、問 2(1) および問 2(2) を参考にしてもよい。

問3

静磁場に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 真空中で距離 r (m) 離れた二つの磁極それぞれ磁荷 m_1 (Wb) と m_2 (Wb) の間に働く力は

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

で与えられる(磁場に対するクーロンの法則)。ここで $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{C}^{-2}$ は真空の透磁率と呼ばれる定数である。

磁荷 $\pm m$ の磁極が微小な距離 l だけ離れておかれたものは磁気双極子と呼ばれ、 $-m$ から $+m$ ($m > 0$) へ向かう方向を持ち、 $M = ml$ の大きさのベクトルを磁気双極子モーメントと呼ぶ。

図1のように、原点に z 軸方向に向いて置かれた磁気双極子モーメント M の作る磁場について、位置ベクトル r (ただし $|r| \gg |l|$) の点での磁場を

$$H_r = -\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

のように与える磁気ポテンシャルが、

$$\psi(r, \theta) = \frac{M}{4\pi\mu_0 r^2} \cos(\theta)$$

のようにあらわされる事を示せ。ただし、 (r, θ, φ) は図1のような球座標である。

必要なら、ルジャンドル展開、すなわち $r \ll 1$ のとき、

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\theta)$$

で、ただし、 $P_0(\cos\theta) = 1$, $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$, $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$, ... を用いてもよい。

- (2) ビオ・サバルの法則は、線電流 I が流れる線素 ds が、線素から R の位置につくる磁場は

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{ds \times R}{R^3}$$

で与えられるというものである。これを用いて、図2のように、原点を中心とし z 軸に垂直な面に置かれた半径 a の円の線状の導体に電流 J が流れているとき、 z 軸上で距離 r ($r \gg a$) 離れた点での磁場 H の方向と強さを求めよ。これを用いて、半径 a の円電流 J は大きさ $M = \mu_0 \pi a^2 J$ のような磁気双極子と(少なくとも z 軸方向の磁場については)等価であることを示せ。

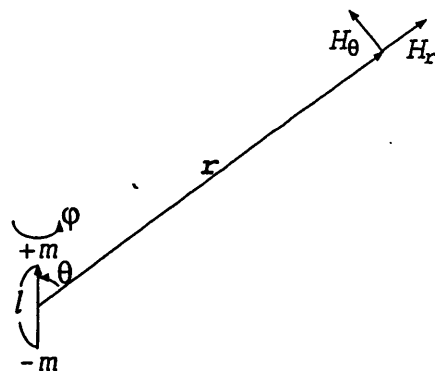


図1: 磁気双極子モーメント M の作る磁場。

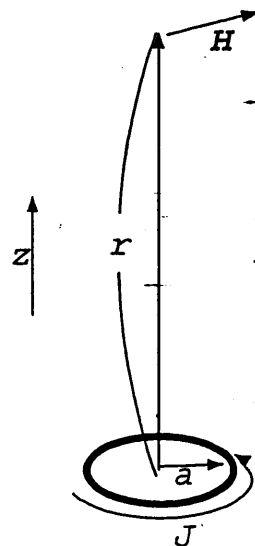


図2: 円電流の作る磁場。

(3) 磁束密度 B_0 の一様磁場に、磁場と垂直な方向に初速度 v_{\perp} で打ち込まれた質量 m_e の電荷 q はどのような運動をするかを述べ、この運動によって生じる電流の作る磁気双極子モーメントが

$$M = \frac{\mu_0 m_e v_{\perp}^2}{2B_0}$$

で与えられることを示せ。

(4) 円筒座標 (r, φ, z) で、 φ 成分がなく ($B_{\varphi} = 0$)、 B_r, B_z が座標 φ によらない軸対称な磁場 $B = (B_r(r, z), 0, B_z(r, z))$ (図3) がある。 B_z が z のみに依存し、 z 方向にゆっくりと変化する場合を考える。

(ア) 磁場の変化の割合を $\frac{dB_z}{dz} = \beta(z)$ とするとき、マックスウェル方程式から $B_r = -r\beta(z)/2$ となることを示せ。

(イ) ある半径 r で $v = (v_r, v_{\varphi}, v_z) = (0, v_{\perp}, 0)$ の速度を持ち、旋回運動していた質量 m_e 、電荷 q の点電荷に z 方向の速度 $v_z = v_{\parallel}$ を加えた。この点電荷の z 方向の運動方程式が

$$m_e \frac{dv_z}{dt} = -\frac{m_e v_{\perp}^2}{2B_z} \beta(z)$$

となることを示せ。

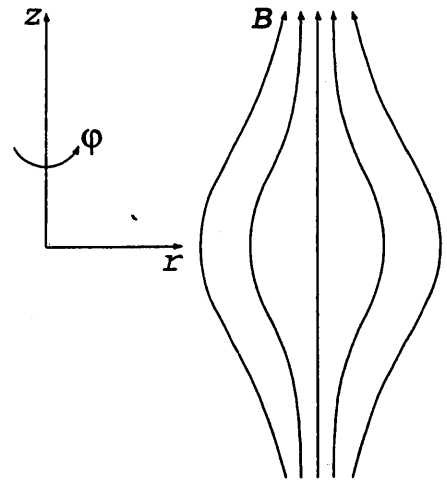


図 3: 軸対称の磁場構造。

なお、円筒座標 (r, φ, z) で、 e を基底ベクトルとすると、スカラー Ψ の勾配は、

$$\text{grad}\Psi \equiv \frac{\partial\Psi}{\partial z} e_z + \frac{\partial\Psi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} e_{\varphi}$$

ベクトル A の発散と回転は、それぞれ、

$$\text{div}A \equiv \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial\varphi}$$

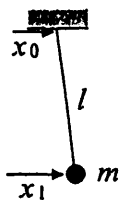
$$\text{rot}A \equiv \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r A_{\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial\varphi} \right) e_z + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z} \right) e_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) e_{\varphi}$$

で与えられる。

問 4

単振り子および二重振り子について以下の設問に答えよ。なお吊り下げ点やおもりの変位量はひもの長さ比べて十分小さく、ひもの質量はおもりの質量に比べて無視でき、摩擦は無視できるとする。また重力加速度は g とする。

(1) 下図に示すような単振り子（おもりの質量 m ；ひもの長さ l ；吊り下げ点の水平方向の変位 x_0 ；おもりの水平方向の変位 x_1 ）がある。



この単振り子のおもりに関する運動方程式を書け。

(2) この単振り子の吊り下げ点を、水平方向に $a \sin(\omega t)$ で揺らしたとき、定常状態でおもりは $b \sin(\omega t + \phi)$ で水平方向に揺れるとする。（ a, b : 振幅（正）、 ω : 角周波数、 t : 時間、 ϕ : 位相）このとき吊り下げ点の変位からおもりの変位までの伝達関数は次のようになる。

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

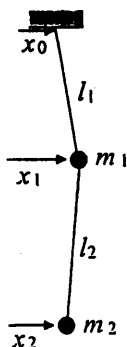
ただし、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

である。

吊り下げ点の変位からおもりの変位までのゲイン (b/a) と位相 (ϕ) の角周波数依存性を図示せよ。その際、縦軸にゲインの \log と位相を、横軸には角周波数の \log をとること。

(3) 次に下図に示すような二重振り子（おもりの質量 m_1, m_2 ；ひもの長さ l_1, l_2 ；吊り下げ点の変位 x_0 ；上のおもりの変位 x_1 ，下のおもりの変位 x_2 ）を考える。



この二重振り子の2つのおもりに関する運動方程式を書け。

(4) 吊り下げ点の変位から下のおもりの変位までの伝達関数は以下ようになる。

$$\frac{x_2}{x_0} = \frac{\alpha g^2 / l_1 l_2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}$$

ただし、

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2l_1 l_2} \left\{ \alpha(l_1 + l_2) - \sqrt{\alpha^2(l_1 + l_2)^2 - 4\alpha l_1 l_2} \right\}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{2l_1 l_2} \left\{ \alpha(l_1 + l_2) + \sqrt{\alpha^2(l_1 + l_2)^2 - 4\alpha l_1 l_2} \right\}},$$

$$\alpha = \frac{m_1 + m_2}{m_1},$$

である。

この伝達関数のゲインと位相の角周波数依存性を図示せよ。

(5) 二重振り子のパラメタ（おもりの質量 m_1, m_2 ; ひもの長さ l_1, l_2 ）がある特殊な値をとる場合に伝達関数がどのようなになるかを示し、それが定性的に正しいことを直感的に説明せよ。

問5

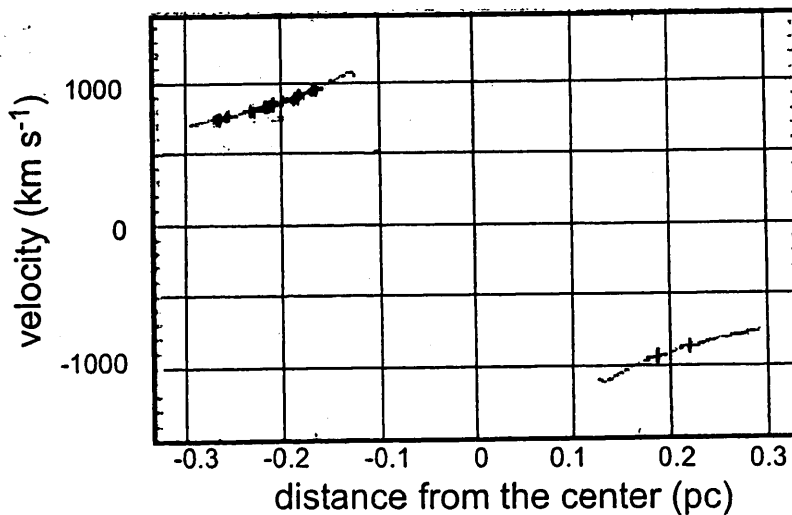
末尾にある表を参考にして答えよ。また、問5を選択する場合は、(2)に関しては対数方眼グラフのある専用の回答用紙に記入せよ。

(1) 地球の温度 T_{\oplus} を、太陽、地球に関する天文定数、物理定数を用いて式であらわせ。また、何度になるのかを有効数字1桁で求めよ。太陽も地球も表面は黒体と近似してよい。ここでは、地球の熱伝導率は非常に高く、温度一定と仮定してよい。Stefan-Boltzmannの輻射法則によれば、温度 T の黒体が単位時間、単位面積から出す輻射流束(輻射エネルギー)は σT^4 である。

(2) 原始星とは、主として質量降着によって解放される重力エネルギーで輝いている星である。原始星(半径 R_* 、質量 M_*)に周囲から星間物質が一定の割合、質量降着率 $\dot{M} = 10^{-5} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$ で、球対称に降り注いでいる場合を考える。星の質量の増加率は質量降着率と等しいとする。原始星が成長しても半径 R_* は時間によらずほぼ一定であることがわかっている。原始星の年齢 t が 10^4 yr 、 10^5 yr のときの様子をヘルツスプルング・ラッセル図(縦軸は光度 L 、横軸は温度 T) 上に●でプロットせよ(それぞれの年齢での原始星の質量は、 0.1 、 $1 M_{\odot}$ である)。ヒントとして、 $t = 10^3 \text{ yr}$ ($M_* = 0.01 M_{\odot}$) のときの位置を解答用紙に示してある。

実は、原始星のまわりにはダストがあり、そのために原始星は直接観測できない。原始星からの輻射で近傍のダストは破壊され、中空のダスト・エンベロープが形成されている。ダスト・エンベロープは光学的に厚く、またその半径 R_{dust} は、質量降着および原始星の進化にかかわらず一定である。原始星の年齢 t が 10^3 yr 、 10^4 yr 、 10^5 yr のときのダスト・エンベロープを解答用紙に○でプロットせよ。

(3) 国立天文台の研究者は、渦巻銀河 NGC4258 の中心を電波望遠鏡を用いて観測し、正確にケプラーの法則に従う edge-on の(=真横から見ている)回転円盤が存在することを明らかにした。下の図は、その論文から転載した回転曲線である。円盤の内側に、存在すると思われる質量を有効数字1桁で算出せよ。また、それはどのような天体であるかを推測せよ。



問5に使用する天文定数、物理定数、数値、など

pc	パーセク	3×10^{18} cm
AU	天文単位 (太陽・地球間距離)	1.5×10^{13} cm
yr	年	3×10^7 s
R_{\odot}	太陽半径	7×10^{10} cm
M_{\odot}	太陽質量	2×10^{33} g
L_{\odot}	太陽光度	4×10^{33} erg s ⁻¹
T_{\odot}	太陽表面温度	6000 K
$T_{c\odot}$	太陽中心温度	1.6×10^7 K
R_{\oplus}	地球半径	6×10^8 cm
M_{\oplus}	地球質量	6×10^{27} g
c	光速	3×10^{10} cm s ⁻¹
G	重力定数	7×10^{-8} dyn cm ² g ⁻²
k	Boltzmann 定数	1.4×10^{-16} erg K ⁻¹
σ	輻射定数 (Stefan-Boltzmann 定数)	6×10^{-5} erg cm ⁻² s ⁻¹ K ⁻⁴
R_*	原始星半径	3×10^{11} cm
R_{dust}	原始星のダスト・エンベロープ半径	1×10^{14} cm

問6

恒星内部の対流について次の設問に答えなさい。

(1) 次の文章の括弧の中を適切な数学的表現で埋めなさい。

恒星内部でのエネルギーの輸送は輻射、伝導、対流によって行われる。いま、恒星内部でのエネルギーの輸送が対流によって行われる場合（これを対流不安定という）を考える。ある対流要素が鉛直方向に z から $z + \delta z$ まで断熱的に上昇するとしよう。つまり、対流要素は周囲と熱のやり取りを行わない。このとき対流要素の圧力 P と密度 ρ との間には

$$P\rho^{-\gamma} = \text{const.},$$

という関係が成立することが知られている。但し、 $\gamma = c_p/c_v$ (c_p は定圧比熱、 c_v は定積比熱) である。

圧力 P 、密度 ρ をもつ対流要素が δz だけ浮き上がり、その圧力と密度が $P - \delta P$ 、 $\rho - \delta \rho$ となったとしよう。この浮き上がった位置でのまわりの物質の圧力と密度は、おのおの $P + (dP/dz)\delta z$ 、 $\rho + (d\rho/dz)\delta z$ である。重力は下向きに働いているから、 $(dP/dz) < 0$ は負の値である。

さて、断熱的に上昇する対流要素の圧力と密度には次のような関係式が成立する。

$$\left(\quad \quad \quad \right) \dots (a)$$

この式において、 $\delta \rho$ 、 δP が ρ 、 P に比べて小さいとすると、 $(\rho - \delta \rho)^\gamma \simeq \rho^\gamma - \gamma \rho^{\gamma-1} \delta \rho$ と展開して、対流要素の圧力と密度の関係を与える式として、

$$\delta P = \left(\quad \quad \quad \right) \dots (b)$$

を得る。一方、対流要素は上昇するとき周囲と圧力平衡にあるはずである（さもなければ、潰れるか、拡散してしまう）。つまり、

$$\delta P = \left(\quad \quad \quad \right) \dots (c)$$

となり、この式と (b) 式をから $\delta \rho$ は次のようになる。

$$\delta \rho = \left(\quad \quad \quad \right) \dots (d)$$

さて、もし、以下の不等号が成立すれば沸きあがっている対流要素は周辺の物質よりも軽いことになるのでそのまま上昇を続けるであろう。これを対流不安定という。

$$\left(\quad \quad \quad \right) \dots (e)$$

あるいは、恒星内部が対流不安定であるための条件は、 P 、 ρ 、 dP/dz 、 $d\rho/dz$ 、 γ を用いて、

$$\left(\quad \quad \quad \right) \dots (f)$$

とも書ける。

いま、場所的に化学組成が変化していない領域を考える。輻射圧が無視できるような理想気体の場合には、対流の起こる条件を温度と圧力、 γ だけを使って次のように書き下すことができる。

$$\left(\quad \quad \quad \right) \dots (g)$$

つまり、恒星の内部では温度勾配がある値よりも急になると対流によってエネルギーが輸送されることになる。

(2) 次の設問に文章で答えなさい。

(a) 大きい質量の主系列星は、発生したエネルギーのほとんどを対流で運んでいる領域が中心にある。その理由を説明しなさい。

(b) 逆に、小さい質量の主系列星は表面に対流層を持っている。その理由を説明しなさい。